БАКАЛАВРИАТ

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

МГУ

Издательство Московского университета

ISBN 978-5-19-011094-4

9 785190 110944

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

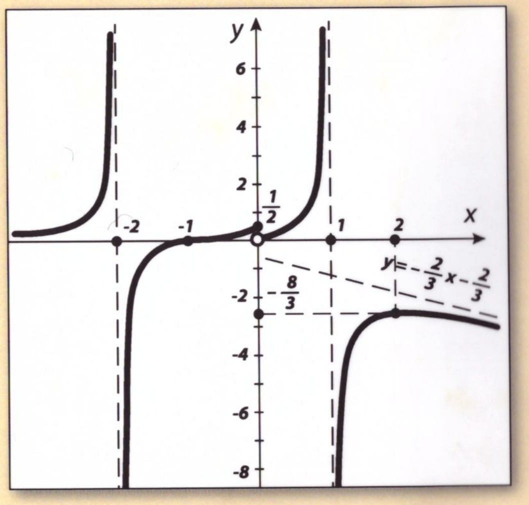
БАКАЛАВРИАТ

БАКАЛАВРИАТ

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко
Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Дифференцирование функции одной переменной:
теория и задачи



БАКАЛАВРИАТ

УЧЕБНЫЕ ПОСОБИЯ

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики
и кибернетики

И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко
Е. В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дифференцирование функции одной переменной:

теория и задачи

*Учебное пособие
для студентов
I курса университетов*

Издательство Московского
университета
2015

УДК 517.2
ББК 22.161.6
С14

Печатается по постановлению редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М. В. Ломоносова

Рецензенты:
доцент ф-та ВМК МГУ к.ф.-м.н. *В. В. Тихомиров*,
проф. ф-та ВМК МГУ д.ф.-м.н. *В. В. Фомичёв*

Садовничая И. В., Фоменко Т. Н., Хорошилова Е. В.

С14 Математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной: Теория и задачи. Учебное пособие для студентов 1 курса университетов.– М.: Издательство Московского университета, 2015. – 152 с.

ISBN 978-5-19-011094-4

Издание посвящено теоретическим и практическим аспектам темы «Дифференцирование функции одной переменной», изучаемой в рамках программы курса математического анализа. Оно основано на опыте чтения авторами лекций и ведения практических занятий на факультете ВМК МГУ. Пособие содержит 3 главы, первая из которых посвящена общим теоретическим аспектам. Она содержит основные понятия и факты, связанные с дифференцированием функций, а также некоторые примеры применения производных для решения различных задач. Во второй главе излагается общая схема исследования функции и построения ее графика, даются рекомендации по решению задач на отыскание наибольшего (наименьшего) значения функции на заданном множестве. Демонстрируется ряд примеров решения таких задач. Третья глава содержит задачи по всем рассматриваемым разделам. Большая часть задач приводится с подробными решениями, остальные рекомендуются для самостоятельной работы студентов. Ко всем задачам даны ответы. Цель данного учебного пособия – помочь студенту в изучении теоретической части и приобретении практических навыков решения задач по теме «Дифференцирование функции одной переменной».

Для студентов университетов. Издание может быть полезно преподавателям, читающим лекции и ведущим практические занятия по математическому анализу и всем, кто желает самостоятельно изучить данные темы или более подробно с ними ознакомиться.

УДК 517.2
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-19-011094-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые читатели! Учебное пособие содержит материал по теме «Дифференцирование функции одной переменной» в объеме программы по математическому анализу для первого курса факультета ВМК. Данное издание продолжает серию учебных пособий [8]–[12], написанных авторами в предыдущие годы и посвященных различным разделам математического анализа, изучаемого на первом курсе.

В пособии три главы. В 1 и 2 главах излагается теоретический материал. В первой главе приводится основной теоретический материал по данной теме. Во второй главе содержится теоретический материал и примеры по исследованию поведения функции и построению ее графика, а также по отысканию наибольшего (наименьшего) значений функции на множестве. В каждой из первых двух глав своя двойная нумерация определений и всех утверждений, с указанием номера параграфа.

В третьей главе помещены задачи по всем разделам первых двух глав. В ней содержатся не только задачи из известного задачника Б. П. Демидовича, но и из других источников. Мы полагаем, что решение задач является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала. Большая часть задач приводится с подробными решениями, остальные даются для самостоятельной работы студентов. Ко всем задачам даны ответы.

В конце пособия имеется список литературы, где перечисляются учебники и задачники, которые использовались при составлении данного пособия, а также некоторые источники для дальнейшего знакомства с изложенными в пособии темами.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса факультета ВМК МГУ, а также для первокурсников других университетов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что оно окажется полезным как студентам, так и преподавателям при изучении или преподавании данной темы.

И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова

Глава 1. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ.

§1. Понятие дифференцируемости. Производная и ее свойства.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a,b); точка $x_0 \in (a,b)$; число Δx достаточно мало, так что $x_0 + \Delta x \in (a,b)$.

Определение 1.1. ***Приращением функции*** *$y = f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, называется число $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$.*

Утверждение 1.1. *Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.*

Доказательство. По определению функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$, что равносильно $\lim\limits_{\Delta x\to 0} (f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$. □

Определение 1.2. *Число $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (при условии, что этот предел существует) называется* ***производной функции*** *$y = f(x)$ в точке x_0.*

Обозначения: $f'(x_0)$, $f'(x)|_{x=x_0}$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df}{dx}\Big|_{x=x_0}$, $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Определение 1.3. ***Правой (левой) производной*** *функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется число*

$$f'_+ = \lim_{\Delta x\to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\left(f'_- = \lim_{\Delta x\to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right)$$

Утверждение 1.2. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) (= f'(x_0))$.*

Пример 1.1. *Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Вычислим ее левую и правую производную в точке $x_0 = 0$:*

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1;$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Очевидно, что в данном случае $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, следовательно, $f'(0)$ не существует.

Геометрический смысл производной.

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Отметим на нем точки $M(x_0, f(x_0))$ и $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Прямая MN называется **секущей** графика функции $f(x)$. Зафиксируем точку M. Тогда угол между секущей MN и осью Ox зависит только от Δx. Обозначим его $\varphi(\Delta x)$.

Определение 1.4. ***Касательной** к графику функции $y = f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN при стремлении точки N к точке M (то есть при стремлении приращения Δx к нулю).*

*Угол $\varphi(\Delta x)$ при этом стремится к некоторому углу φ_0, который называется **углом наклона касательной** к оси Ox.*

Теорема 1.1. *Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику $f(x)$, причем $\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0)$, где φ_0 — угол между касательной и положительным направлением оси Ox, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$.*

Доказательство. Обозначим через $H = H(x_0 + \Delta x, f(x_0))$ точку с координатами $(x_0 + \Delta x, f(x_0))$. Тогда $\angle NMH = \varphi(\Delta x)$,

$$\operatorname{tg} \angle NMH = \frac{NH}{MH} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Следовательно, $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x_0) = \varphi_0$. □

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Определение 1.5. *Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:*

$$\Delta y = A\Delta x + \bar{o}(\Delta x), \quad \Delta x \to 0 \quad \text{или} \quad \Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Здесь A — некоторая постоянная, не зависящая от Δx.

Теорема 1.2. *Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке конечную производную $f'(x_0)$. При этом постоянная A в определении дифференцируемости равна $f'(x_0)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$, следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Достаточность. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \bar{o}(1)$ при $\Delta x \to 0$. Значит, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \bar{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$. □

Теорема 1.3. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \bar{o}(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. □

Замечание 1.1. *Обратное, вообще говоря, неверно. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$.*

Теорема 1.4 (производная сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция*

$y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогда сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$(f(\varphi(t_0)))'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0).$$

Доказательство. Выберем приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда соответствующее ему приращение функции $x = \varphi(t)$ представляется в виде: $\Delta x = \varphi(t_0+\Delta t) - \varphi(t_0)$. Приращение функции $y = f(x)$, соответствующее приращению Δx, имеет вид: $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$, где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда получаем, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t} =$$

$$= f'(x_0)\frac{\varphi'(t_0)\Delta t + \beta(\Delta t)\Delta t}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\varphi'(t_0)\Delta t + \beta(\Delta t)\Delta t}{\Delta t} =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0) + f'(x_0)\beta(\Delta t) + \varphi'(t_0)\alpha(\Delta x) + \beta(\Delta t)\alpha(\Delta x) =$$

$$= f'(x_0)\varphi'(t_0) + \bar{o}(1), \quad \Delta t \to 0.$$

Здесь $\beta(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$ в силу дифференцируемости функции $x = \varphi(t)$ в точке t_0; поскольку из дифференцируемости функции следует ее непрерывность, то можно утверждать, что $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Значит, действительно выражение

$$f'(x_0)\beta(\Delta t) + \varphi'(t_0)\alpha(\Delta x) + \beta(\Delta t)\alpha(\Delta x) = \bar{o}(1)$$

при $\Delta t \to 0$. Отсюда следует, что сложная функция $y = f(x(t))$ дифференцируема в точке t_0 и ее производная $(f(\varphi(t_0)))'\Big|_{t=t_0} = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$. □

Теорема 1.5 (производная обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0; пусть существует $f'(x_0)\neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем она дифференцируема в точке y_0 и*

$$(f^{-1}(y))'\Big|_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Обратная функция $x = f^{-1}(y)$ определена, строго монотонна и непрерывна в окрестности точки y_0 по теореме об обратной функции. Пусть приращение ее аргумента $\Delta y \neq 0$; тогда приращение функции $\Delta x = f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)$ также отлично от нуля (в силу строгой монотонности обратной функции). Значит, можем утверждать, что $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. Кроме того, так как $x_0 = f^{-1}(y_0)$,

$$x_0 + \Delta x = f^{-1}(y_0) + \Delta x =$$

$$= f^{-1}(y_0) + f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0+\Delta y),$$

то

$$f(x_0+\Delta x) = f(f^{-1}(y_0+\Delta y)) = y_0 + \Delta y.$$

Следовательно,

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = y_0 + \Delta y - f(f^{-1}(y_0)) = \Delta y,$$

то есть выражение Δy действительно есть приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. Заметим также, что $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$, поскольку функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0. Отсюда

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Это и означает дифференцируемость обратной функции. □

Теорема 1.6. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то функции $u(x)\pm v(x)$, $u(x)\cdot v(x)$ и $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (если $v(x_0)\neq 0$) также дифференцируемы в точке x_0, причем*

$$(u(x)\pm v(x))'\Big|_{x_0} = u'(x_0)\pm v'(x_0);$$

$$(u(x)\cdot v(x))'\Big|_{x_0} = u'(x_0)\cdot v(x_0) + u(x_0)\cdot v'(x_0);$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\Bigg|_{x_0} = \frac{u'(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Доказательство. 1) Обозначим: $y(x) = u(x) \pm v(x)$, $\Delta u = u(x_0+\Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0+\Delta x) - v(x_0)$, $\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0)$. Тогда

$$\Delta y = (u(x_0+\Delta x) \pm v(x_0+\Delta x)) - (u(x_0) \pm v(x_0)) =$$

$$= (u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) \pm (v(x_0+\Delta x) - v(x_0)) = \Delta u \pm \Delta v.$$

Значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta u}{\Delta x} \pm \dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$.

2) Пусть теперь $y(x) = u(x)\cdot v(x)$. Тогда

$$\Delta y = (u(x_0+\Delta x)\cdot v(x_0+\Delta x)) - (u(x_0)\cdot v(x_0)) =$$

$= u(x_0+\Delta x)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0)) + v(x_0)(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) =$

$= u(x_0+\Delta x)\Delta v + v(x_0)\Delta u$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} u(x_0+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} = u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0).$$

Мы воспользовались тем фактом, что функция $u(x)$ дифференцируема в точке x_0, следовательно, непрерывна в этой точке и $\lim\limits_{\Delta x\to 0} u(x_0+\Delta x) = u(x_0)$.

3) Наконец, обозначим $y(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, причем $v(x_0) \neq 0$. Так как функция $v(x)$ непрерывна в точке x_0 и $v(x_0) \neq 0$, то существует вещественное $\delta > 0$ такое, что $v(x) \neq 0$, если $x \in B_\delta(x_0)$. Пусть $|\Delta x| < \delta$. Тогда $\Delta y =$

$$= \frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0) - v(x_0+\Delta x)u(x_0)}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} =$$

$$= \frac{v(x_0)(u(x_0+\Delta x) - u(x_0)) - u(x_0)(v(x_0+\Delta x) - v(x_0))}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}$$

$= \dfrac{v(x_0)\Delta u - u(x_0)\Delta v}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)}$. Отсюда получаем, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0)\frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x_0+\Delta x)v(x_0)} = \frac{u'(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}.$$

Мы снова воспользовались непрерывностью функции $v(x)$ в точке x_0, откуда следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x_0+\Delta x) = v(x_0)$. □

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$, так как $\Delta C \equiv 0$ в любой точке.

2) $(x)'|_{x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{(x_0+\Delta x) - x_0}{\Delta x} = 1.$

3) $(e^x)'|_{x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0} \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0}$ (по следствию из второго замечательного предела).

$$(a^x)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

4) $(\log_a x)' = \{y = \log_a x\} = \dfrac{1}{(a^y)'} = \dfrac{1}{a^y \ln a} = \dfrac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \dfrac{1}{x\ln a}$ (по теореме о производной обратной функции, $x > 0$). В частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5) $(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha\ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha\ln x}\alpha\dfrac{1}{x} = x^\alpha\alpha\dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$, $x \neq 0$.

6) $(\sin x)'|_{x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x_0 \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x_0$$

(использовали первый замечательный предел).

7) $(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)'\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$

8) $(\operatorname{tg} x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

9) $(\operatorname{ctg} x)' = \left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $\quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

10) $(\arcsin x)' = \{y = \arcsin x\} = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} =$

$= \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad -1 < x < 1$.

Здесь мы снова применили теорему о производной обратной функции. Перед корнем выбран знак "+", поскольку функция $\arcsin x$ при $-1 < x < 1$ принимает значения на промежутке $(-\pi/2, \pi/2)$, следовательно, $\cos(\arcsin x) > 0$.

Упражнение 1.1. *Доказать, что для функции* $f(x)=\arcsin x$ *верно, что* $f'_-(1)=f'_+(-1)=+\infty$.

11) $(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$

12) $(\operatorname{arctg} x)'=\{y=\operatorname{arctg} x\}=\frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}=\cos^2 y=\cos^2(\operatorname{arctg} x)=$

$=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)}=\frac{1}{1+x^2}$ (производная обратной функции).

13) $(\operatorname{arcctg} x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

14) $(\operatorname{sh} x)'=\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\operatorname{ch} x.$

15) $(\operatorname{ch} x)'=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\operatorname{sh} x.$

16) $(\operatorname{th} x)'=\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)'=\frac{\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ (использовано тождество для гиперболических функций: $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{sh}^2 x\equiv 1$).

17) $(\operatorname{cth} x)'=\left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)'=\frac{\operatorname{sh}^2 x-\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}=\frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x},\quad x\neq 0.$

18) $(\operatorname{arsh} x)'=\{y=\operatorname{arsh} x\}=\frac{1}{(\operatorname{sh} y)'}=\frac{1}{\operatorname{ch} y}=\frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}=$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

19) $(\operatorname{arch} x)'=(\ln(x+\sqrt{x^2-1}))'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}(x+\sqrt{x^2-1})'=$

$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\quad |x|>1.$

20) $(\operatorname{arth} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{2}(\ln(1+x)-\ln(1-x))'=$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-x^2},\quad |x|<1.$

21) $(\operatorname{arcth} x)'=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)=\frac{1}{1-x^2},$ $|x|>1.$

§2. Дифференциал функции, его свойства и применение.

Определение 2.1. ***Дифференциалом*** *функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0*, соответствующим приращению* Δx*, называется выражение* $dy=f'(x_0)\Delta x$.

Замечание 2.1. *1) Если точка* x_0 *фиксирована, то дифференциал* dy *— главная линейная часть приращения функции* Δy *— является линейной функцией от аргумента* Δx *(если* $f'(x_0)=0$*, то* $dy\equiv 0$*).*

2) Вообще говоря, $dy\neq\Delta y$*. Действительно, рассмотрим график функции* $y=f(x)$*. Отметим на нем точки* $M(x_0,f(x_0))$ *и* $N(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$*. Обозначим также через* H *и* P *точки на координатной плоскости с координатами* $H(x_0+\Delta x,f(x_0))$*;* $P(x_0+\Delta x,f'(x_0)\Delta x+f(x_0))$*. Тогда точки* N*,* P*,* H *лежат на одной прямой;* $MH\perp NH$*. Получаем, что* $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=NH$*;* $dy=f'(x_0)\Delta x=PH$*. Итак,* $dy\neq\Delta y$ *в общем случае; кроме того, мы выяснили геометрический смысл дифференциала: дифференциал* dy *— это ордината приращения касательной, соответствующего приращению аргумента* Δx*.*

3) Если x *— независимая переменная, то* $dx=x'\Delta x=1\cdot\Delta x=\Delta x$*. Вообще, как видно и из геометрического смысла дифференциала, если* $y=f(x)$ *— линейная функция, то* $dy=\Delta y$*.*

Утверждение 2.1 (инвариантность формы первого дифференциала). *Пусть функция* $y=f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*. Тогда ее первый дифференциал имеет вид:* $dy=f'(x_0)dx$*, независимо от того, является ли* x *независимой переменной или функцией некоторого аргумента* t*.*

Доказательство. Пусть сначала x — независимая переменная. Тогда $dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$.

Если $x=\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, такой, что $x_0=\varphi(t_0)$, то (по теореме о дифференцируемости сложной функции) $dy=(f(\varphi(t))'|_{t_0}\Delta t=f'(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)\Delta t=f'(x_0)dx$, так как по определению дифференциал функции $x = \varphi(t)$ в точке t_0 имеет вид: $dx = \varphi'(t_0)\Delta t$. □

Замечание 2.2. *Так как для дифференцируемой функции* $y = f(x)$ *всегда* $dy = f'(x)dx$, *то выражение* $\dfrac{dy}{dx}$ — *не просто обозначение для производной; его можно рассматривать как отношение двух дифференциалов.*

Применение дифференциала для приближенных вычислений.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Так как ее приращение $\Delta f = df + \bar{o}(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $(\Delta f - df)/(\Delta x) = \bar{o}(1)$ при $\Delta x \to 0$.

Определение 2.2. *Число* $(\Delta f - df)/(\Delta x)$ *называется* ***относительной погрешностью*** *приближенного равенства*

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Эта формула служит для приближенного вычисления значений функции. Приведем пример.

Пример 2.1. *Вычислим приближенно* $\sqrt[4]{1,02}$. *Обозначим* $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0,02$. *Тогда*

$$\sqrt[4]{1,02} = f(x_0+\Delta x) \approx \sqrt[4]{1} + (\sqrt[4]{x})'|_{x=1} \cdot 0,02 = 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 = 1,005.$$

Сделаем проверку:

$$1,005^2 = 1,010025; 1,010025^2 = 1,020150500625.$$

Видим, что мы получили ошибку в четвертом знаке.

Заметим, что мы пока не можем оценить точность приближенных вычислений, поскольку не обладаем соответствующим математическим аппаратом. Несколько позже, изучив формулу Тейлора, мы сможем не только вычислять значения функций в точке с любой точностью, но и оценивать погрешность наших приближенных вычислений.

§3. Производные и дифференциалы высших порядков, формула Лейбница. Дифференцирование параметрически заданной функции.

Определение 3.1. *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и дифференцируема на интервале* (a, b). *Если функция* $f'(x)$ *дифференцируема в некоторой точке* $x_0 \in (a, b)$, *то число* $(f'(x))'|_{x_0}$ *называют* ***второй производной (производной второго порядка)*** *функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначают* $f''(x_0)$ *или* $f^{(2)}(x_0)$ $(y''|_{x_0}, y^{(2)}|_{x_0}, \left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x_0}, \dots)$.

Аналогично, если функция $f^{(n-1)}(x)$ $(n = 2, 3, \dots)$ *дифференцируема в точке* $x_0 \in (a, b)$, *то число* $(f^{(n-1)}(x))'|_{x_0}$ *называют* ***n−ной производной (производной n−ого порядка)*** *функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначают* $f^{(n)}(x_0)$ $(y^{(n)}|_{x_0}, \left.\dfrac{d^n f}{dx^n}\right|_{x_0}, \dots)$.

Замечание 3.1. *1) Если функция* $y = f(x)$ *имеет конечную производную n−ого порядка в любой точке множества* A, *то говорят, что* $f(x)$ *n* ***раз дифференцируема*** *на множестве* A.

2) Принято считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Производные высших порядков некоторых элементарных функций.

1) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$, $x > 0$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ — верно. Пусть $(x^\alpha)^{(n-1)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)x^{\alpha-n+1}$; тогда

$$(x^\alpha)^{(n)} = ((x^\alpha)^{(n-1)})' = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то

$$(x^m)^{(n)} = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}, & m \geqslant n \\ 0, & m < n. \end{cases}$$

2) $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; $(e^x)^{(n)} = e^x$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$ имеем: $(a^x)' = a^x \ln a$ — верно. Пусть $(a^x)^{(n-1)} = a^x \ln^{n-1} a$; тогда $(a^x)^{(n)} = (a^x)' \ln^{n-1} a = a^x \ln^n a$.

3) $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$; $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Доказательство (индукция по n). При $n = 1$: $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$ — верно.

Пусть $(\sin x)^{(n-1)} = \sin(x + (\pi(n-1))/2)$, тогда $(\sin x)^{(n)} =$

$$= \cos\left(x + \frac{\pi(n-1)}{2}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

Для $\cos x$ формула выводится аналогично.

4) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$, $x > 0$.

Доказательство (индукция по n).

$n = 1$: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} = \dfrac{(-1)^0 0!}{x^1}$ — верно.

Пусть $(\ln x)^{(n-1)} = (-1)^{n-2}\dfrac{(n-2)!}{x^{n-1}}$; тогда $(\ln x)^{(n)} =$

$$= (-1)^{n-2}(n-2)!\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)' = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!(-n+1)}{x^n} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

5) $(\operatorname{arctg} x)^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{(x^2+1)^{n/2}} \sin\left(n\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Доказательство. Обозначим $y = \operatorname{arctg} x$, тогда $\dfrac{1}{x^2+1} = \cos^2 y$. Покажем по индукции, что $y^{(n)} = (n-1)! \cos^n y \cdot \sin(n(y + \pi/2))$. При $n = 1$: $y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1} = \cos^2 y = 0! \cos y \cdot \sin(y + \pi/2)$ — верно. Пусть $y^{(n-1)} = (n-2)! \cos^{n-1} y \cdot \sin((n-1)(y + \pi/2))$, тогда

$$y^{(n)} = (n-2)!\left(\cos^{n-1} y \cdot \sin((n-1)(y + \pi/2))\right)' =$$

$$= (n-2)!\left((n-1)\cos^{n-2} y(-\sin y)\sin((n-1)(y+\pi/2)) + \right.$$

$$\left. + \cos^{n-1} y \cos((n-1)(y + \pi/2))(n-1)\right) y'_x =$$

$$= (n-1)!\left(-\cos^{n-2} y \cdot \sin y \cdot \sin((n-1)(y+\pi/2)) + \right.$$

$$\left. + \cos^{n-1} y \cdot \cos((n-1)(y+\pi/2))\right) \frac{1}{x^2+1} =$$

$$= (n-1)! \cos^{n-2} y \cdot \cos(y + (n-1)(y + \pi/2)) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} =$$

$$= (n-1)! \cos^n y \cdot \cos(n(y+\pi/2) - \pi/2) =$$

$$= (n-1)! \cos^n y \cdot \sin(n(y + \pi/2)).$$

Теорема 3.1 (формула Лейбница). *Пусть функции $u(x)$, $v(x)$ n раз дифференцируемы в точке x_0. Тогда функция $u(x) \cdot v(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0, причем*

$$(u(x) \cdot v(x))^{(n)}|_{x_0} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x_0) v^{(k)}(x_0).$$

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции (по n). При $n = 1$: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = C_1^0 u^{(1)}(x)v^{(0)}(x) + C_1^1 u^{(0)}(x)v^{(1)}(x)$ — верно. Пусть $(u(x) \cdot v(x))^{(n-1)}|_{x_0} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k u^{(n-1-k)}(x_0)v^{(k)}(x_0)$.

Тогда $(u(x) \cdot v(x))^{(n)} =$

$$= (C_{n-1}^0 u^{(n-1)}(x)v(x) + \dots + C_{n-1}^{n-1} u(x)v^{(n-1)}(x))' =$$

$$= C_{n-1}^0 u^{(n)}(x)v(x) + C_{n-1}^0 u^{(n-1)}(x)v'(x) + C_{n-1}^1 u^{(n-1)}(x)v'(x) +$$

$$+ C_{n-1}^1 u^{(n-2)}(x)v''(x) + \dots + C_{n-1}^{n-1} u'(x)v^{(n-1)}(x) +$$

$$+ C_{n-1}^{n-1} u(x)v^{(n)}(x) = C_n^0 u^{(n)}(x)v(x) + (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) \cdot$$

$$\cdot u^{(n-1)}(x)v'(x) + \dots + C_n^n u(x)v^{(n)}(x) = C_n^0 u^{(n)}(x)v(x) +$$

$$+ C_n^1 u^{(n-1)}(x)v'(x) + \dots + C_n^n u(x)v^{(n)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x). \quad \square$$

Определение 3.2. *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). Зафиксируем приращение аргумента $\Delta x = h$. Тогда $dy = f'(x)h$ — функция аргумента x. Если она дифференцируема в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$, то ее дифференциал в точке x_0 имеет вид: $d(f'(x)h)|_{x_0} = f''(x_0)h\Delta x$. Если выбрать приращение $\Delta x = h$, то полученное выражение $d(dy))|_{x_0} = f''(x_0)h^2 = f''(x_0)dx^2$ называется* ***вторым дифференциалом*** *функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента dx, и обозначается $d^2y|_{x_0}$ или $d^2f(x)|_{x_0}$.*

Аналогично ***n-ым дифференциалом (дифференциалом n-ого порядка)*** *функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента dx, называется выражение*

$$d^nf(x)|_{x_0} = d(d^{n-1}f(x))|_{x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n.$$

Замечание 3.2. *При $n \geqslant 2$ n-ый дифференциал уже не обладает, вообще говоря, свойством инвариантности: пусть $x = \varphi(t)$. Тогда*

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\varphi'(t)dt) = (f'(x)\varphi'(t)dt)'dt =$$

$$= f''(x)\varphi'(t)\varphi'(t)dt^2 + f'(x)\varphi''(t)dt^2 =$$

$$= f''(x)(\varphi'(t)dt)^2 + f'(x)(\varphi''(t)dt^2) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Если x — независимая переменная (или линейная функция), то $d^nx = 0$, $n = 2, 3, \ldots$.

Определение 3.3. *Говорят, что функция $y = f(x)$* ***задана параметрически*** *на множестве X, если на некотором множестве T заданы функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, причем функция $\varphi(t)$ имеет своим множеством значений X и на этом множестве определена обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Тогда для любого $x \in X$: $y = \psi(\varphi^{-1}(x))$.*

Пример 3.1. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0,\pi]$. *Тогда* $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.

Теорема 3.2. *Если функция $y = f(x)$ задана параметрически: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дважды дифференцируемы в точке t_0 и $\varphi'(t_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ и*

$$y'|_{x_0} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad y''(x)|_{x_0} = \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3}.$$

Доказательство.

$$y'(x)|_{x_0} = \frac{dy|_{t_0}}{dx|_{t_0}} = \frac{\psi'(t_0)dt}{\varphi'(t_0)dt} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)};$$

$$y''(x_0)|_{x_0} = \frac{d(y'(x))|_{t_0}}{dx|_{t_0}} = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'\Big|_{t_0} dt}{\varphi'(t_0)dt} =$$

$$= \frac{\psi''(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi''(t_0)\psi'(t_0)}{(\varphi'(t_0))^3}. \quad \square$$

§4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки c.

Определение 4.1. *Функция $y = f(x)$* ***возрастает*** *в точке c, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$. $f(x)$* ***убывает*** *в точке c, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$.*

Теорема 4.1 (достаточное условие возрастания (убывания) функции в точке). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке c и $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$), то $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c.*

Доказательство. Рассмотрим случай $f'(c) > 0$ (случай $f'(c) < 0$ рассматривается аналогично). Поскольку по определению $f'(c) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$, то для любого вещественного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех значениях x из проколотой δ-окрестности точки c будет выполнено:

$\left|\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)\right| < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon = f'(c)$, тогда для любого $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$ будет верно: $0 < \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} < 2f'(c)$. Так как $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$, то из последнего неравенства вытекает, что $f(x) < f(c)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f(x) > f(c)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то есть функция $f(x)$ возрастает в точке c. □

Пример 4.1. *1) Рассмотрим функцию $y = \sin x$. $y'(0) = 1$, следовательно, функция возрастает в точке $x = 0$.*

2) Рассмотрим теперь функцию $y = \sin^3 x$. $y'(0) = 3\sin^2 x \cdot \cos x|_{x=0} = 0$, тем не менее функция возрастает в точке $x = 0$. Видим, что условие теоремы является достаточным, но не является необходимым.

Определение 4.2. *Функция $y = f(x)$ имеет в точке c* ***локальный максимум (минимум)****, если найдется такое число $\delta > 0$, что $f(x) \leqslant f(c)$ $(f(x) \geqslant f(c))$ при всех $x \in B_\delta(c)$. Если функция $f(x)$ имеет в точке c локальный максимум или минимум, то говорят, что она имеет в этой точке* ***локальный экстремум****.*

Теорема 4.2 (Ферма). (Необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции). *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и имеет в этой точке локальный экстремум, то $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f'(c) > 0$ $(f'(c) < 0)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает (убывает) в точке c. Но по условию она имеет в этой точке экстремум. Мы пришли к противоречию; следовательно, наше предположение неверно и $f'(c) = 0$. □

Пример 4.2. *1) Рассмотрим функцию $y = \cos x$. В точке $x = 0$ имеет локальный максимум, поэтому $f'(0) = 0$.*

2) Рассмотрим теперь функцию $y = x^3$. $y'(0) = 0$, но экстремума в точке $x = 0$ нет. Видно, что условие теоремы является необходимым, но не достаточным.

3) У функции $y = |x|$ производная в точке $x = 0$ не существует, хотя это точка локального минимума (в случае недифференцируемых функций теорему применять нельзя).

Будем теперь рассматривать функцию $f(x)$, определенную на сегменте $[a, b]$.

Теорема 4.3 (Ролль). *Пусть функция $y = f(x)$: 1) непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) дифференцируема на интервале (a, b); 3) $f(a) = f(b)$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f'(\xi) = 0$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает на нем своих точной верхней и нижней граней (вторая теорема Вейерштрасса). Обозначим $m = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_1)$, $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) = f(x_2)$, $x_1, x_2 \in [a, b]$. Заметим, что, если $m = M$, то $f(x) \equiv m = M$ на $[a, b]$. В этом случае $f'(x) = 0$ при всех $x \in (a, b)$. Пусть теперь $m < M$. Если $f(a) = m$ или $f(b) = m$, то $x_2 \in (a, b)$ (поскольку $f(a) = f(b)$). Значит, в точке x_2 функция $f(x)$ имеет локальный максимум, следовательно, $f'(x_2) = 0$. Аналогично, если $f(a) = M$ или $f(b) = M$, то $x_1 \in (a, b)$ и в точке x_1 функция $f(x)$ имеет локальный минимум, следовательно, $f'(x_1) = 0$. Остался только случай, когда $x_1, x_2 \in (a, b)$. В этом случае $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. □

Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в следующем: при выполнении всех условий теоремы на кривой $y = f(x)$, $a < x < b$, найдется точка, касательная в которой будет параллельна оси абсцисс.

Заметим, что в случае нарушения хотя бы одного из трех условий теоремы ее заключение, вообще говоря, перестает быть верным. Приведем соответствующие примеры.

Пример 4.3. *1) Функция $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ удовлетворяет условиям 2 и 3 теоремы, но не является непрерывной на сегменте $[0, 1]$. Очевидно, что всюду на интервале $(0, 1)$ $f'(x) = 1 \neq 0$.*

2) Функция $f(x) = |x|$ удовлетворяет условиям 1 и 3 на сегменте $[-1, 1]$, но не является дифференцируемой на интервале $(-1, 1)$ (не существует производная в точке $x = 0$). При

$-1 < x < 0$ $f'(x) = -1$; *при* $0 < x < 1$ $f'(x) = 1$.

3) Функция $f(x) = x$ *удовлетворяет условиям 2 и 3 на интервале* $(0, 1)$, *но* $f(0) \neq f(1)$ *и* $f'(x) = 1$ *при всех* $x \in (0, 1)$.

Теорема 4.4 (Лагранж). *Пусть функция* $y = f(x)$: *1) непрерывна на сегменте* $[a, b]$; *2) дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда найдется такая точка* $\xi \in (a, b)$, *что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{4.1}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$. Заметим, что эта функция также непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) (поскольку представляет собой линейную комбинацию функции $f(x)$ и линейной функции). Заметим также, что $F(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0$; $F(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$. Значит, функция $F(x)$ удовлетворяет на сегменте $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля; следовательно, на интервале (a, b) есть такая точка ξ, что $F'(\xi) = 0$. С другой стороны, $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Получаем, что $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$. $\square$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа: при выполнении всех условий теоремы на кривой $y = f(x)$, $a < x < b$, найдется точка, касательная в которой будет параллельна секущей, проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$.

Замечание 4.1. *Формулу (4.1) часто называют* ***формулой Лагранжа*** *или* ***формулой конечных приращений***. *Если положить в ней* $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$, *то (4.1) можно переписать в виде:* $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$, $0 < \theta < 1$.

Следствие 1. *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b), *и* $f'(x) = 0$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* $f(x) \equiv const$ *на* (a, b).

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in (a, b)$. Возьмем произвольное $x \in (a, b)$ (пусть для определенности $x > x_0$). Тогда

$f(x)$ дифференцируема на $[x_0, x]$, следовательно, непрерывна на этом сегменте. Тогда по теореме Лагранжа найдется такая точка $\xi \in (x_0, x)$, что $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$, то есть $f(x) = f(x_0)$. В силу произвольности выбора точки x получаем, что $f(x) = f(x_0)$ при всех $x \in (a, b)$, то есть $f(x) \equiv const$ на (a, b). $\square$

Следствие 2. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (a, b). *Тогда*

1) $f(x)$ *не убывает (не возрастает) на* (a, b) *тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ *при всех* $x \in (a, b)$;

2) Если $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *при всех* $x \in (a, b)$, *то* $f(x)$ *возрастает (убывает) на* (a, b).

Доказательство. 1) *Необходимость.* Пусть $f(x)$ не убывает на (a, b). Предположим, что существует такая точка $x_1 \in (a, b)$, что $f'(x_1) < 0$. Тогда $f(x)$ убывает в точке x_1 (достаточное условие убывания функции в точке). Значит, найдется точка $x_2 > x_1$, для которой будет выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Но это противоречит тому, что функция $f(x)$ является неубывающей. Значит, наше предположение неверно и $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$.

Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a, b)$. Выберем точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Заметим, что функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, значит, по теореме Лагранжа, найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(\xi) \geqslant 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то и левая часть последнего равенства неотрицательна. Это означает, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, если только $x_1 < x_2$, то есть функция $f(x)$ не убывает на (a, b).

2)Пусть $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$. Выберем точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Поскольку $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, то по теореме Лагранжа, найдется такая точка $\xi \in (x_1, x_2)$, что $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Так как $f'(\xi) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то и левая часть последнего равенства строго положительна. Это означает, что $f(x_2) > f(x_1)$, если только $x_1 < x_2$, то есть функция $f(x)$ возрастает на (a, b). $\square$

Замечание 4.2. *Условие $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a, b)$ не является необходимым условием возрастания функции на интервале (a, b). Действительно, функция $f(x) = x^3$, например, возрастает на $(-1, 1)$, но $f'(0) = 0$.*

Следствие 3. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда ее производная $f'(x)$ не может иметь на этом интервале ни устранимых разрывов, ни разрывов первого рода.*

Доказательство. Пусть точка c принадлежит интервалу (a, b) и в этой точке функция $f'(x)$ имеет конечные односторонние пределы: $l_1 = \lim\limits_{x \to c-0} f'(x)$ и $l_2 = \lim\limits_{x \to c+0} f'(x)$. Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$, $x > c$. Так как $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на сегменте $[c, x]$, то найдется такая точка $\xi \in (c, x)$, что $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi)$. Значит, $f'(c) = \lim\limits_{x \to c+0} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c+0} f'(\xi) = l_2$ (предел правой части существует, поскольку существует предел левой части). Аналогично $f'(c) = l_1$. Значит, функция $f'(x)$ непрерывна в точке c. □

Разрывы второго рода производная дифференцируемой функции иметь может.

Пример 4.4. *Рассмотрим функцию* $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ *Она непрерывна и дифференцируема на интервале $(-1, 1)$; ее производная $f'(x)$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода (проверьте!).*

Теорема 4.5 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$; дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда найдется такая точка $\xi \in (a, b)$, что справедливо соотношение*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \quad (4.2)$$

Доказательство. Покажем сначала, что $g(a) \neq g(b)$. Действительно, если $g(a) = g(b)$, то функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Значит, существует такая точка $\zeta \in (a, b)$, что $g'(\zeta) = 0$, но по условию $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$.Введем теперь вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$. Она непрерывна на сегменте $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) (как линейная комбинация функций $f(x)$ и $g(x)$). Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$. Значит, согласно теореме Ролля, существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi)$. Так как $g'(\xi) \neq 0$, то получаем, что $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. □

Замечание 4.3 *Формула (4.2) называется* ***обобщенной формулой конечных приращений*** *или* ***формулой Коши***. *Формула Лагранжа является ее частным случаем при $g(x) = x$. Геометрический смысл теоремы Коши заключается в следующем: если рассмотреть параметрически заданную кривую $x = g(t)$, $y = f(t)$, то при выполнении условий теоремы на отрезке между $g(a)$ и $g(b)$ найдется точка, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки с координатами $(g(a), f(a))$ и $(g(b), f(b))$. Кроме того, если в теореме Коши дополнительно потребовать, чтобы $g(a) \neq g(b)$, то условие $g'(x) \neq 0$ можно заменить менее жёстким условием: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 > 0$ при $x \in (a; b)$.*

§5. Раскрытие неопределенностей.

Определение 5.1. *Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой* ***неопределенность вида*** $\dfrac{0}{0}$ *при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.*

Аналогично можно определить неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ при $x \to a - 0$, $x \to a + 0$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Теорема 5.1. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a - \delta, a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a - \delta, a)$;*

3) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} g(x) = 0$; *4) существует предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(*$A \in \mathbb{R}$ *или* $A = \infty$*). Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. Положим $f(a) = g(a) = 0$. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, такая, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n < a$. Тогда существует такой натуральный номер N, что $x_n \in (a-\delta, a)$ при всех $n \geqslant N$. Рассмотрим сегмент $[x_n, a]$, $n \geqslant N$. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на нем (поскольку $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} g(x) = f(a) = g(a) = 0$) и дифференцируемы на интервале (x_n, a); кроме того, $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in (x_n, a)$. Значит, существует такая точка $\xi_n \in (x_n, a)$, что $\dfrac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$ (по теореме Коши). Так как $f(a) = g(a) = 0$, то из последнего сотношения получаем, что $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Заметим теперь, что $\xi_n \to a$ при $n \to +\infty$ (так как $x_n < \xi_n < a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$). Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = A$ (определение предела функции по Гейне). Но это означает, что существует $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$. В силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$ и определения предела функции по Гейне получаем, что $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. □

Совершенно аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5.2. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a, a+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, a+\delta)$; 3)* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$; *4) существует предел* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(*$A \in \mathbb{R}$ *или* $A = \infty$*). Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Из двух приведенных выше теорем немедленно вытекает

Следствие (первое правило Лопиталя). *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$; 3)* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$; *4) существует предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(*$A \in \mathbb{R}$ *или* $A = \infty$*). Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Определение 5.2. *Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой* ***неопределенность вида*** $\dfrac{\infty}{\infty}$ *при $x \to a$, если $f(x) \to \infty$ $(\pm\infty)$, $x \to a$; $g(x) \to \infty$ $(\pm\infty)$, $x \to a$.*

Аналогично можно определить неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x \to a-0$, $x \to a+0$, $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Теорема 5.3. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a-\delta, a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta, a)$; 3)* $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} g(x) = \infty$; *4) существует предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ *(*$A \in \mathbb{R}$ *или* $A = \infty$*). Тогда существует и предел* $\lim\limits_{x\to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство. 1) Пусть сначала $A \in \mathbb{R}$. Так как $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a-0} g(x) = \infty$, то, не ограничивая общности, можем считать, что $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ при всех $x \in (a-\delta, a)$. Пусть $\{x_n\}$ — числовая последовательность, такая, что $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n < a$. Тогда существует такой натуральный номер $N = N(\delta)$, что $x_n \in (a-\delta, a)$ при всех $n \geqslant N$. Выберем натуральные числа m, n, такие, что $N \leqslant m < n$, и рассмотрим сегмент, заключенный между точками x_m и x_n. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы на этом сегменте, причем $g'(x) \neq 0$ на нем. Значит, по теореме Коши, на соответствующем интервале найдется такая точка ξ_{mn}, что

$$\frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} = \frac{f(x_n) - f(x_m)}{g(x_n) - g(x_m)} = \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \cdot \frac{1 - f(x_m)/f(x_n)}{1 - g(x_m)/g(x_n)}$$

(можем делить на $f(x_n)$ и $g(x_n)$, поскольку эти выражения отличны от нуля). Отсюда получаем, что (если $f(x_n) \neq f(x_m)$)

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\xi_{mn})}{g'(\xi_{mn})} \cdot \frac{1 - g(x_m)/g(x_n)}{1 - f(x_m)/f(x_n)}.$$

Зафиксируем теперь произвольное $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то найдется такое $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) \in (0, \delta)$, что неравенство $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ будет выполено при всех $x \in (a - \delta_1, a)$. Далее, так как $x_n \to a$ при $n \to +\infty$, $x_n < a$, то существует такое натуральное число M, $M > N$, что $x_n \in (a - \delta_1, a)$ при всех $n \geqslant M$. Значит, для любого $n > M$ верно: $\left|\dfrac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (1)

(так как точка ξ_{Mn} лежит между x_M и x_n, а $x_M, x_n \in (a - \delta_1, a)$).

Теперь рассмотрим выражение $\dfrac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)}$. Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} g(x_n) = \infty$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} = 1$. Значит, найдется такой натуральный номер $K > M$, что при всех $n \geqslant K$ будет выполнено:
$\left|\dfrac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} - 1\right| < \dfrac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2}$ (2)

(так как $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = \infty$, то можем считать, что $f(x_n) \neq f(x_M)$, то есть знаменатель в левой части неравенства не обращается в 0). Окончательно получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $K = K(\varepsilon)$, что при всех $n \geqslant K$:

$$\left|\frac{f(x_n)}{g(x_n)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})} \cdot \frac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} \quad A\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})}\right| \cdot \left|\frac{1 - g(x_M)/g(x_n)}{1 - f(x_M)/f(x_n)} - 1\right| + \left|\frac{f'(\xi_{Mn})}{g'(\xi_{Mn})} - A\right| <$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2} + |A|\right) \cdot \frac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(здесь использованы оценки (1) и (2)). Это означает, что $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$, откуда, в силу произвольности выбора последовательности $\{x_n\}$, вытекает, что $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

2) Пусть теперь $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$. Тогда $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Поскольку $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$, то существует такое число $\delta_1 \in (0, \delta)$, что $|f'(x)| > |g'(x)|$ для любого $x \in (a - \delta_1, a)$. Но $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a - \delta_1, a)$, следовательно, и $f'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a - \delta_1, a)$. Значит, можем применить рассуждения пункта 1 к отношению $\dfrac{g(x)}{f(x)}$ и получить, что $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$. Но это и означает, что $\lim\limits_{x \to a-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$. □

Аналогично доказывается

Теорема 5.4. *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на интервале $(a, a + \delta)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, a + \delta)$; 3) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a+0} g(x) = \infty$; 4) существует предел $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Из двух последних теорем вытекает

Следствие (второе правило Лопиталя). *Пусть 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы на множестве $\overset{\circ}{B}_\delta(a)$ для некоторого $\delta > 0$; 2) $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in \overset{\circ}{B}_\delta(a)$; 3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$; 4) существует предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ ($A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$). Тогда существует и предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Замечание 5.1. *И в первом, и во втором правилах Лопиталя можно заменять условия $x \to a \pm 0$, $x \to a$ на условия*

$x \to \pm\infty$, $x \to \infty$. *Пусть, например,* $x \to +\infty$. *Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \left\{x = \frac{1}{t}\right\} = \lim_{t\to 0+0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0+0}\frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g(1/t)(-1/t^2)} =$$

$$= \lim_{t\to 0+0}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Приведем несколько примеров использования правил Лопиталя, а также случаев, когда они неприменимы.

Пример 5.1. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x} = \dfrac{1}{6}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x = \lim\limits_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(x\ln x)} =$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1/x}{(-1/x^2)}} = e^0 = 1.$$

3) Вычислим предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$. Применим формально правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}.$$

Предел в правой части последнего соотношения не существует, так как $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, а функция $\cos\dfrac{1}{x}$ не имеет предела в точке 0. Однако исходный предел можно вычислить:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Правило Лопиталя здесь неприменимо, поскольку одним из условий теоремы является существование предела отношения производных (конечного или бесконечного); в данном случае он не существует.

4) Рассмотрим функции $f(x) = 1 + 2x + \sin 2x$ и $g(x) = (2x+\sin 2x)e^{\sin x}$. Их отношение представляет собой

неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x\to+\infty$. Применим формально правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} =$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2+2\cos 2x}{(2+2\cos 2x)e^{\sin x} + (2x+\sin 2x)e^{\sin x}\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos^2 x}{e^{\sin x}(4\cos^2 x + (2x+\sin 2x)\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4\cos x}{e^{\sin x}(4\cos x + 2x + \sin 2x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{4\frac{\cos x}{x}}{e^{\sin x}\left(1+\frac{4\cos x+\sin 2x}{x}\right)} = 0.$$

Однако предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ не существует: рассмотрим две последовательности аргументов $\{x'_n\} = \{2\pi n\}$ и $\{x''_n\} = \left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right\}$. Тогда $x'_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$, $x''_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$; при этом $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x'_n)}{g(x'_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+4\pi n}{4\pi n} = 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x''_n)}{g(x''_n)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\pi+4\pi n}{(\pi+4\pi n)\cdot e} = \dfrac{1}{e}$.

Правило Лопиталя здесь неприменимо, поскольку одним из условий теоремы является условие отличия от нуля производной функции $g(x)$ в некоторой окрестности точки a; в данном случае $g'(x)$ обращается в 0 в точках вида $\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, которые есть в любой окрестности точки $+\infty$.

§6. Формулы Тейлора и Маклорена.

Теорема 6.1 (формула Тейлора). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $B_\delta(a)$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть точка $x \in B_\delta(a)$, число $p > 0$ произвольно. Тогда существует такая точка ξ, лежащая между a и x, что*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x), \quad (6.1)$$

где

$$R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!p} f^{(n+1)}(\xi). \quad (6.2)$$

Определение 6.1. *Формула (6.1) называется* ***формулой Тейлора*** *с центром в точке a; выражение $R_{n+1}(x)$ —* ***остаточным членом*** *формулы Тейлора; остаточный член вида (6.2) называется* ***остаточным членом в общей форме*** *или* ***в форме Шлемильха–Роша.***

Доказательство теоремы 6.1. Обозначим

$$\varphi_n(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Тогда $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi_n(x,a)$. Пусть для определенности $x \in (a, a+\delta)$ (случай $x \in (a-\delta, a)$ рассматривается аналогично). Введем вспомогательную функцию

$$\psi(t) = f(x) - \varphi_n(x,t) - (x-t)^p Q(x), \quad a \leqslant t \leqslant x,$$

где $Q(x) = \dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}$. Так как

$$\varphi_n(x,t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n,$$

а все функции $f^{(k)}(t)$, $k = 1, \dots, n$ дифференцируемы на промежутке $[a, a+\delta)$ по крайней мере один раз, то можем утверждать, что функция $\psi(t)$ непрерывна и дифференцируема на

сегменте $[a,x]$ (как композиция дифференцируемых функций и многочленов). Кроме того, $\psi(a) = f(x) - \varphi_n(x,a) - R_{n+1}(x) = 0$; $\psi(x) = f(x) - \varphi_n(x,x) = f(x) - f(x) = 0$. Следовательно, существует такая точка $\xi = \xi(x,p) \in (a,x)$, что $\psi'(\xi) = 0$ (теорема Ролля). Вычислим $\psi'(\xi)$:

$$\psi'(\xi) = -(\varphi_n'(x,t))|_{t=\xi} + p(x-\xi)^{p-1}Q(x) =$$

$$= -\left(f'(\xi) - \frac{f'(\xi)}{1!} + \frac{f''(\xi)}{1!}(x-\xi) - \frac{f''(\xi)}{2!}\cdot 2(x-\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{f'''(\xi)}{2!}(x-\xi)^2 - \frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot 3(x-\xi)^2 + \dots + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n\right) +$$

$$+ p(x-\xi)^{p-1}Q(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + p(x-\xi)^{p-1}Q(x).$$

Так как $\psi'(\xi) = 0$, то получаем, что

$$Q(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} \cdot \frac{(x-\xi)^n}{(x-\xi)^{p-1}}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{n+1}(x) = Q(x)(x-a)^p = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p} \cdot \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p (x-\xi)^{n+1}. \ \square$$

Определение 6.2. *Многочлен*

$$\varphi_n(x,a) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется ***многочленом Тейлора*** *степени n функции $f(x)$ в точке a.*

Замечание 6.1. *1) Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке a. Тогда*

$$\varphi_n(a,a) = f(a), \quad \varphi_n'(a,a) = f'(a), \dots, \varphi_n^{(n)}(a,a) = f^{(n)}(a). \ (6.3)$$

2) Если $f(x) = P(x)$ — многочлен степени n, то $P^{(n+1)} \equiv 0$ и формула (6.1) имеет вид $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ — ***формула Тейлора для многочленов.***

Следствие 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$; точка $x \in B_\delta(a)$. Тогда существует такое число $\theta \in (0,1)$, что $f(x) = \varphi_n(x,a) + R_{n+1}(x)$, где*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Доказательство. Положим в теореме 6.1: $p = n+1$. Тогда формула (6.2) примет вид: $R_{n+1}(x) =$

$$= \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^{n+1} \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!(n+1)} f^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)),$$

где $a + \theta(x-a) = \xi$. Так как точка ξ лежит между a и x, то $\theta \in (0,1)$. □

Следствие 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$; точка $x \in B_\delta(a)$. Тогда существует такое число $\theta \in (0,1)$, что $f(x) = \varphi_n(x,a) + R_{n+1}(x)$, где*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Доказательство. Положим в теореме $p = 1$. Тогда формула (6.2) примет вид: $R_{n+1}(x) = \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right) \cdot \frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\xi) =$

$$= (x-a)\frac{(x-(a+\theta(x-a)))^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)) =$$

$$= \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+\theta(x-a)), \text{ где } a+\theta(x-a) = \xi.$$

Так как точка ξ лежит между a и x, то $\theta \in (0,1)$. □

Замечание 6.2. *Поскольку точка ξ в теореме 6.1 зависит от x и от выбора числа p, а это число в следствиях 1 и 2 выбирается различным, то и числа $\theta \in (0,1)$ в выражениях для остаточного члена в форме Лагранжа и в форме Коши, вообще говоря, различны.*

Теорема 6.2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $y = f(x)$ $(n-1)$ раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$ и n раз дифференцируема в самой точке a. Пусть $x \in B_\delta(a)$. Тогда*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \bar{o}((x-a)^n), \quad x \to a.$$

Доказательство. Пусть $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi_n(x,a)$. Докажем, что $R_{n+1}(x) = \bar{o}((x-a)^n)$, $x \to a$. Воспользуемся формулами (6.3):

$$R_{n+1}(a) = f(a) - \varphi_n(a,a) = 0, \quad R'_{n+1}(a) = f'(a) - \varphi'_n(a,a) = 0, \ldots$$

$$\ldots, R^{(n)}_{n+1}(a) = f^{(n)}(a) - \varphi^{(n)}_n(a,a) = 0.$$

Вычислим предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n}$, применяя правило Лопиталя $n-1$ раз: $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a} \frac{R'_{n+1}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \cdots = \lim\limits_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)}$.

Последнее выражение по-прежнему представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$, но применять правило Лопиталя уже нельзя: функция $R^{(n-1)}_{n+1}(x)$ уже дифференцируема только в самой точке a, и не обязательно дифференцируема в ее окрестности. Вычислим последний предел другим способом (воспользуемся при этом тем, что $R^{(n-1)}_{n+1}(a) = 0$):

$$\lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x)}{n!(x-a)} = \lim_{x\to a} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x) - R^{(n-1)}_{n+1}(a)}{n!(x-a)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(R_{n+1}^{(n-1)}(x)\right)'|_{x=a} = \frac{1}{n!}R_{n+1}^{(n)}(a) = 0.$$

Получили, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$, то есть действительно $R_{n+1}(x) = \bar{o}((x-a)^n)$ при $x \to a$. □

Следствие. *Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в $\delta-$окрестности точки a для некоторого $\delta > 0$ и $(n+1)$ раз дифференцируема в самой точке a. Тогда для любого $x \in B_\delta(a)$ верно: $f(x) = \varphi_n(x,a) + O((x-a)^{n+1})$, $x \to a$.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема в точке a и n раз — в $B_\delta(a)$. Тогда для любой точки $x \in B_\delta(a)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} +$$

$$+\bar{o}((x-a)^{n+1}) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$

$$+(x-a)^{n+1}\left(\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \bar{o}(1)\right) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^{n+1}\cdot O(1),\ x \to a.$$

□

Определение 6.3. ***Формулой Маклорена*** *называется формула Тейлора с центром в точке $a = 0$, то есть формула*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ может иметь вид:

1) $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)$, $0 < \theta_1 < 1$ — форма Лагранжа;

2) $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}(1-\theta_2)^n}{n!}f^{(n+1)}(\theta_2 x)$, $0 < \theta_2 < 1$ — форма Коши;

3) $R_{n+1}(x) = \bar{o}(x^n)$, $x \to 0$ — форма Пеано.

Замечание 6.3. *Если при всех $x \in B_\delta(0)$ существует $f^{(n)}(x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то говорят, что $f(x)$* ***бесконечно дифференцируема*** *в $B_\delta(0)$. Если к тому же существует такая постоянная $M > 0$, что $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ при всех $x \in B_\delta(0)$ и при всех $n \in \mathbb{N}$, то можем оценить остаток $R_{n+1}(x)$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in B_\delta(0)$*

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x)\right| \leqslant \frac{M\delta^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Разложение по формуле Тейлора некоторых элементарных функций.

I. $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$ для любого $n \in N$, то $f^{(n)}(0) = 1$. Следовательно, $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$, где $R_{n+1}(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta_1 x}$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+1}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+1}e^a}{(n+1)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

II. $f(x) = \sin x$.

Поскольку $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$ для любого $n \in N$, то

$$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k,\ k = 1, 2, \dots, \\ (-1)^k, & n = 2k+1,\ k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

Значит, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dots + \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{n+2}(x)$, где $n = 2k+1$, $R_{n+2}(x) = \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin\left(\theta_1 x + \pi + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

III. $f(x) = \cos x$.

Поскольку $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$ для любого $n \in N$, то $f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k,\ k = 1, 2, \ldots, \\ 0, & n = 2k+1,\ k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$ Следовательно, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{n+2}(x)$, где $n = 2k$, $R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\theta_1 x + \pi + \frac{\pi n}{2}\right)$, $0 < \theta_1 < 1$.

Если $|x| \leqslant a$, $a > 0$, то $|R_{n+2}(x)| \leqslant \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} \to 0$ при $n \to +\infty$.

IV. $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$.

Поскольку $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$, то $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, $n = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_{n+1}(x)$, где

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta_1 x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n (1-\theta_2)^n x^{n+1}}{(1+\theta_2 x)^{n+1}},$$

$\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ (записали остаточный член в двух разных формах — Лагранжа и Коши).

1) Пусть $0 \leqslant x \leqslant 1$. Тогда

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)|1+\theta_1 x|^{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

поскольку $|1 + \theta_1 x|^{n+1} \geqslant 1$.

2) Пусть тперь $-a \leqslant x < 0$, где $a \in (0,1)$. Тогда

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{|x^{n+1}| \cdot |1 - \theta_2|^n}{|1+\theta_2 x|^{n+1}} = |x|^{n+1}\left|\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right|^n \cdot \frac{1}{|1+\theta_2 x|} \leqslant$$

$\leqslant \frac{a^{n+1}}{1-a} \to 0$ при $n \to +\infty$. Действительно, так как $0 < \theta_2 < 1$, то $0 \leqslant \frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x} \leqslant 1$. Мы доказали, что $R_{n+1}(x) \to 0$ при

$n \to +\infty$ для всех $x \in (-1, 1]$.

V. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in (-1, 1)$. Поскольку

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$$

то $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$. Следовательно,

$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n +$ $+ R_{n+1}(x)$, где

$$R_{n+1}(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1-\theta_2)^n(1+\theta_2 x)^{\alpha-n-1}}{n!}x^{n+1},$$

$0 < \theta_2 < 1$. Пусть $|x| \leqslant a$, $0 < a < 1$. Покажем, что существует такое натуральное число N, что для любого $n \geqslant N$ выполняется цепочка неравенств:

$$|R_{n+1}(x)| = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!}\right| \cdot \left|\frac{1-\theta_2}{1+\theta_2 x}\right|^n \cdot |x|^{n+1} \cdot |1+\theta_2 x|^{\alpha-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n)}{n!}a^{n+1}\max\{(1+a)^{\alpha-1}, (1-a)^{\alpha-1}\} \leqslant$$

$$\leqslant 2(1+n)^N a^{n+1}\max\{(1+a)^{\alpha-1}, (1-a)^{\alpha-1}\}.$$

Действительно, пусть $N = [|\alpha|] + 1$, $n \geqslant N$. Тогда

$$\frac{|\alpha|(|\alpha|+1)\ldots(|\alpha|+n)}{n!} \leqslant \frac{N(N+1)\ldots(N+n)}{n!} =$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+N)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(N-1)} =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+3}{3}\right)\ldots\left(\frac{n+N-1}{N-1}\right)(n+N) =$$

$$= (1+n)\cdot\left(1+\frac{n}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{N-1}\right)\cdot(1+n)\cdot\left(\frac{n+N}{n+1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+n)^N \cdot \left(1 + \frac{N-1}{n+1}\right) \leqslant 2(1+n)^N.$$

Так как $0 < a < 1$, то выражение $(1+n)^N a^{n+1}$ стремится к нулю при $n \to +\infty$. Значит, $R_{n+1}(x) \to 0$, $n \to +\infty$ при всех $x \in (-1, 1)$.

VI. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x \in [-1, 1]$. Поскольку $f^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n\left(\operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, то $f^{(n)}(0) =$

$$= (n-1)! \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ (-1)^k (2k+1)!, & n = 2k+1, \ k = 0, 1, \ldots. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + \dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{n+2}(x)$, где $n = 2k+1$,

$$|R_{n+2}(x)| = \left| \frac{(n+1)! \sin\left((n+2)\left(\operatorname{arctg} \theta_1 x + \frac{\pi}{2}\right)\right) x^{n+2}}{(1+\theta_1^2 x^2)^{\frac{n+2}{2}} \cdot (n+2)!} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|x|^{n+2}}{|1+\theta_1^2 x^2|^{\frac{n}{2}+1} (n+2)} \leqslant \frac{|x|^{n+2}}{n+2}.$$

Пусть $|x| \leqslant a$, $a \in [0, 1]$, тогда $R_{n+2}(x) \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{n+2} \to 0$ при $n \to +\infty$. Значит, $R_{n+2}(x) \to 0$ при всех $x \in [-1, 1]$.

Приложения формулы Тейлора.

1. Иррациональность числа e.

Покажем, что число e не является рациональным. Согласно полученной формуле,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \quad R_{n+1}(1) = \frac{e^{\theta_1}}{(n+1)!} 1^{n+1},$$

$0 < \theta_1 < 1$. Нам известно, что $2 < e < 3$, следовательно, $1 < e^{\theta_1} < 3$ и $\dfrac{1}{(n+1)!} < R_{n+1}(1) < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

Предположим, что e рационально, то есть $e = \dfrac{p}{q}$, где $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$, причем $q \geqslant 2$ (действительно, если $q = 1$,

то e — целое, но это не так, поскольку $2 < e < 3$). Получаем, что $\dfrac{p}{q} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{q!} + R_{q+1}(1)$. Отсюда $\dfrac{p}{q} \cdot q! = \left(1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{q!}\right) q! + R_{q+1}(1) \cdot q!$, следовательно, число $R_{q+1}(1) \cdot q!$ является целым. Но из наших оценок следует, что $0 < \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{q!}{(q+1)!} < R_{q+1}(1) \cdot q! < \dfrac{3q!}{(q+1)!} = \dfrac{3}{q+1} \leqslant 1$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно, и число e является иррациональным.

2. Приближенные вычисления значений тригонометрических функций.

Заметим, что достаточно научиться вычислять значения функций $\sin x$ и $\cos x$ на промежутках $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Тогда, зная их и применяя различные тригонометрические формулы, можно найти значение любой из тригонометрических функций в любой точке.

а) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + R_{n+2}(x)$, причем $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!}$, если $|x| \leqslant a$. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При $n = 5$ имеем: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + R_7(x)$, где $|R_7(x)| \leqslant \dfrac{(\pi/4)^7}{7!} < 10^{-4}$.

б) $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + R_{n+2}(x)$, причем $|R_{n+2}(x)| \leqslant \dfrac{a^{n+2}}{(n+2)!}$, если $|x| \leqslant a$. Пусть $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При $n = 6$ имеем: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + R_8(x)$, где $|R_8(x)| \leqslant \dfrac{(\pi/4)^8}{8!} < 10^{-5}$.

3. Вычисление пределов.

Выпишем формулы Маклорена с остаточным членом в форме Пеано для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \bar{o}(x^n), \quad x \to 0;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \bar{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \bar{o}(x^{2n+1}), \quad x \to 0;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} + \bar{o}(x^n), \quad x \to 0;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + $$
$$+ \bar{o}(x^n) \quad x \to 0;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \bar{o}(x^{2n+2}), \quad x \to 0.$$

Формулы такого вида (описывающие поведение функции $f(x)$ при $x \to a$) называются **асимптотическими**. Вычислим с их помощью пределы:

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \bar{o}(x^4)\right)}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6} + \bar{o}(x)\right) = \frac{1}{6}.$$

2) $$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^2)^{1/x+5} - e^x}{\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{(1/x+5)\ln(1+x^2)} - e^x}{\ln\left(1 - x^2/2 + \bar{o}(x^3)\right)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{(1/x+5)\left(x^2 - x^4/2 + \bar{o}(x^4)\right)} - e^x}{-x^2/2 + \bar{o}(x^3) + \bar{o}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x + 5x^2 + \bar{o}(x^2)} - e^x}{-x^2/2 + \bar{o}(x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + 5x^2 + 1/2(x+5x^2)^2 - \left(1 + x + x^2/2\right) + \bar{o}(x^2)}{-x^2/2 + \bar{o}(x^2)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{5 + 1/2 - 1/2 + \bar{o}(1)}{-1/2 + \bar{o}(1)} = -10.$$

Упражнение 6.1. *Пусть* $x_n = \operatorname{ctg} x_n$, *причем* $x_n \in (\pi n, \pi + \pi n)$. *Доказать, что* $x_n = \pi n + \dfrac{1}{\pi n} + O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$, $n \to +\infty$.

§7. Исследование функций.

Определение 7.1. *Точка* x_0 *называется* ***точкой локального минимума (максимума)*** *функции* $f(x)$, *если существует такое положительное число* δ, *что неравенство* $f(x_0) \leqslant f(x)$ ($f(x_0) \geqslant f(x)$) *выполнено для всех точек* x *из множества* $B_\delta(x_0)$.

Точка x_0 *называется* ***точкой строгого локального минимума (максимума)*** *функции* $f(x)$, *если существует такое положительное число* δ, *что неравенство* $f(x_0) < f(x)$ ($f(x_0) > f(x)$) *выполнено для всех точек* x *из множества* $\overset{\circ}{B}_\delta(x_0)$.

Определение 7.2. *Функция* $f(x)$ ***возрастает (не убывает)*** *в точке* x_0, *если существует такое положительное число* δ, *что* $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leqslant f(x_0)$) *при всех* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) *при всех* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Функция $f(x)$ ***убывает (не возрастает)*** *в точке* x_0, *если существует такое положительное число* δ, *что* $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) \geqslant f(x_0)$) *при всех* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) \leqslant f(x_0)$) *при всех* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Определение 7.3. *Точка* x_0 *называется* ***стационарной*** *точкой функции* $f(x)$, *если* $f'(x_0) = 0$.

Теорема 7.1. *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* (A, B), $A < a < b < B$ *и* $f'(a) \cdot f'(b) < 0$. *Тогда существует точка* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f'(c) = 0$.

Доказательство. Пусть, например, $f'(a) > 0$, $f'(b) < 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке a и убывает в точке b (по теореме о достаточном условии возрастания (убывания) функции в точке). С другой стороны, $f(x)$ дифференцируема на

$[a,b]$, следовательно, непрерывна на этом сегменте. Значит, в силу второй теоремы Вейерштрасса, существует такая точка $c \in [a,b]$, что $f(c) = \sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$. Из сказанного выше следует, что $c \neq a$ и $c \neq b$, следовательно, c — точка локального максимума $f(x)$ и $f'(c) = 0$ (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции). $\square$

Следствие. (Теорема Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (A,B), $A < a < b < B$, $f'(a) = \alpha$, $f'(b) = \beta$. Тогда для любого числа γ из сегмента $[\alpha,\beta]$ (или $[\beta,\alpha]$) найдется такая точка $c \in [a,b]$, что $f'(c) = \gamma$.*

Доказательство. Если $\gamma = \alpha$ или $\gamma = \beta$, то утверждение очевидно. В противном случае применим теорему 7.1 к функции $g(x) = f(x) - \gamma x$. $\square$

Теорема 7.2. (Первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в проколотой δ–окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и непрерывна в точке c. Тогда*

1) если $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то c — точка строгого локального максимума $f(x)$;

2) если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то c — точка строгого локального минимума $f(x)$;

3) если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c, то экстремума в этой точке нет.

Замечание 7.1. *Если $f'(x)$ существует в проколотой окрестности точки c и меняет знак при переходе через эту точку, то возможен только один из двух случаев: $f'(c)$ не существует или $f'(c) = 0$ (теорема 7.1).*

Доказательство. Пусть точка $x_0 \in \overset{\circ}{B}_\delta(c)$. Тогда $f(c) - f(x_0) = f'(\xi)(c - x_0)$ (теорема Лагранжа; точка ξ лежит между c и x_0). Если $x_0 < c$, то $\xi \in (x_0, c)$, следовательно, $f'(\xi) > 0$, $c - x_0 > 0$, значит, $f(c) > f(x_0)$. Если же $x_0 > c$, то $f'(\xi) < 0$, $c - x_0 < 0$, значит опять $f(c) > f(x_0)$. Получаем, что c — точка строгого локального максимума. Второй пункт рассматривается аналогично.

Если $f'(x)$ не меняет знак при переходе через точку c, то выражение $f(c) - f(x_0)$ меняет знак, следовательно, экстремума в точке c нет. $\square$

Теорема 7.3. (Второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f'(c) = 0$, и пусть существует $f''(c)$. Тогда, если $f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$), то c — точка строгого локального максимума (минимума) $f(x)$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(c) < 0$. Тогда функция $f'(x)$ убывает в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f'(x) > f'(c) = 0$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < f'(c) = 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$. Согласно теореме 2, это означает, что x — точка строгого локального максимума функции $f(x)$. Случай $f'(c) > 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Замечание 7.2. *Если $f''(c) = 0$ или не существует, то теорема «не работает».*

Теорема 7.4. (Третье достаточное условие экстремума). *Пусть n — некоторое нечетное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) < 0 (> 0)$, то c — точка строгого локального максимума (минимума) функции $f(x)$.*

Доказательство. Случай $n = 1$ уже рассмотрен в теореме 3. Пусть n — нечетное натуральное число, $n \geqslant 3$. Предположим, что $f^{(n+1)}(c) < 0$. Тогда функция $f^{(n)}(x)$ убывает в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x) > f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и

$f^{(n)}(x) < f^{(n)}(c) = 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$. Пусть x — произвольная точка из проколотой δ–окрестности точки c. Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f'(x)$:

$$f'(x) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}(x-c) + \frac{f'''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots$$

$$\cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x. Поскольку $f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f'(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-c)^{n-1}$. Если $x < c$, то $\xi \in (x, c)$, следовательно, $f^{(n)}(\xi) > 0$, $(x-c)^{n-1} > 0$ (так как $n-1$ — четное число), значит, $f'(x) > 0$. Если же $x > c$, то $f^{(n)}(\xi) < 0$, $(x-c)^{n-1} > 0$, значит, $f'(x) < 0$. Получили, что $f'(x) > 0$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f'(x) < 0$ при всех $x \in (c, c+\delta)$, то есть c — точка строгого локального максимума (теорема 7.2).

Случай $f^{(n+1)}(c) > 0$ рассматривается аналогично. □

Определение 7.4. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Говорят, что график $f(x)$ является* ***выпуклым вверх (вниз)*** *на (a, b), если на этом интервале он лежит не выше (не ниже) касательной в любой точке $x \in (a, b)$.*

Замечание 7.3. *Поскольку $|f'(x)| < +\infty$ при всех $x \in (a, b)$, то касательная не может быть параллельна оси Oy, то есть понятие не выше (не ниже) всегда имеет смысл.*

Утверждение 7.1. *Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), то для любых точек x_1, x_2, из отрезка $[a, b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ на интервале (x_1, x_2) лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2, где $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$.*

Доказательство. Пусть $f(x)$ является выпуклой вверх, точка $x_0 \in (x_1, x_2)$. Тогда точки A_1 и A_2 лежат по одну сторону от касательной в точке x_0. Следовательно, и отрезок A_1A_2 лежит

под касательной, то есть точка $(x_0, f(x_0))$ — над хордой A_1A_2. В силу произвольности выбора точки x_0 получаем необходимое утверждение. □

Упражнение 7.1. *Доказать обратное: если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и для любых двух точек $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, график $f(x)$ лежит не ниже (не выше) хорды A_1A_2, то функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на (a, b).*

Утверждение 7.2. (Неравенство Йенсена). *Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на интервале (a, b), то для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и для любых положительных λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, верно неравенство*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

$$(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)).$$

Доказательство. Пусть $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Тогда точка $x_0 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in (x_1, x_2)$. Запишем уравнение хорды A_1A_2: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$. Подставим в это уравнение точку (x_0, y_0), принадлежащую хорде:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\lambda_1 - 1)x_1 + \lambda_2 x_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_0 - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_0 - f(x_1) = \lambda_2(f(x_2) - f(x_1)) \Leftrightarrow y_0 = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Если функция $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a, b), то по определению это означает, что $y_0 \leqslant f(x_0)$ $(y_0 \geqslant f(x_0))$. □

Теорема 7.5. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) \leqslant 0$ $(f''(x) \geqslant 0)$ для любой точки $x \in (a, b)$, то $f(x)$ является выпуклой вверх (вниз) на (a, b).*

Доказательство. Пусть $f''(x) \leqslant 0$ при всех $x \in (a,b)$. Обозначим $M(c, f(c))$, где c — некоторая точка из (a,b). Запишем уравнение касательной к графику $f(x)$ в точке M: $y = f'(c)(x-c) + f(c)$. С другой стороны, согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2$, где x — произвольная точка из (a,b), ξ лежит между c и x. Отсюда получаем, что $f(x) - y = \dfrac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2 \leqslant 0$, то есть $f(x) \leqslant y$. Значит, график $f(x)$ лежит не выше касательной, то есть $f(x)$ выпукла вверх. □

Следствие. *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f''(x)$ непрерывна в точке c и $f''(c) > 0 (< 0)$. Тогда найдется $\delta > 0$ такое, что $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$.*

Доказательство. Пусть $f''(c) > 0 (< 0)$. Тогда, в силу теоремы о сохранении знака непрерывной функцией, существует $\delta > 0$ такое, что $f''(x) > 0 (< 0)$ при всех $x \in B_\delta(c)$. Значит, $f(x)$ выпукла вниз (вверх) в $B_\delta(c)$. □

Замечание 7.4. *Если $f''(x) = 0$ при всех $x \in (a,b)$, то $f(x)$ — линейная функция на (a,b) (докажите!) и направление выпуклости можно считать произвольным.*

Теорема 7.6. *Пусть функция $f(x)$ является выпуклой вниз (вверх) на интервале (a,b). Тогда функция $f'(x)$ непрерывна и не убывает (не возрастает) на (a,b).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ выпукла вниз на (a,b); $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Обозначим через k_0 угловой коэффициент хорды A_1A_2, $A_1(x_1, f(x_1))$, $A_2(x_2, f(x_2))$. Поскольку касательная к графику $f(x)$ в точке A_1 лежит не выше графика на интервале (x_1, x_2), следовательно, она лежит не выше хорды A_1A_2, значит, ее угловой коэффициент $f'(x_1) \leqslant k_0$. Аналогично $f'(x_2) \geqslant k_0$, то есть $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. В силу произвольности выбора точек x_1, x_2 получаем, $f'(x)$ не убывает на (a,b). С другой стороны, известно, что производная принимает все промежуточные значения на отрезке $[x_1, x_2]$ (теорема Дарбу). Следовательно, она непрерывна на этом отрезке (критерий непрерывности монотонной функции). Поскольку x_1, x_2 — произвольные точки из интервала (a,b), то это означает, что $f(x)$ непрерывна на всем интервале. □

Определение 7.5. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), $c \in (a,b)$. Точка $M(c, f(c))$ называется* ***точкой перегиба*** *графика $f(x)$, если существует такое число $\delta > 0$, что $B_\delta(c) \subset (a,b)$ и $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$.*

Пример 7.1. *для функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ точка $c = 0$ является точкой перегиба.*

Лемма 7.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b), $c \in (a,b)$ — точка перегиба $f(x)$. Тогда функция $r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c))$ монотонна в точке c (то есть график функции $f(x)$ в некоторой окрестности точки c лежит по разные стороны от касательной в точке $M(c, f(c))$).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ является выпуклой вверх на $(c-\delta, c)$ и вниз на $(c, c+\delta)$ для некоторого $\delta > 0$. Тогда для любых двух точек x_1, x_2 из интервала $(c-\delta, c)$, $x_1 < x_2$, и для любых положительных λ_1, λ_2, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, имеет место неравенство Йенсена: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$. Перейдем в этом неравенстве к пределу при $x_2 \to c-0$: $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 c) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(c)$. Пусть точка $x_0 \in (x_1, c)$. Обозначим $\lambda_1 = \dfrac{c - x_0}{c - x_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{x_0 - x_1}{c - x_1}$. Тогда $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 c = \dfrac{cx_1 - x_0x_1 + x_0c - x_1c}{c - x_1} = x_0$, откуда получаем цепочку неравенств:

$$f(x_0) \geqslant \frac{(c-x_0)f(x_1) + (x_0 - x_1)f(c)}{c - x_1} \Leftrightarrow (c - x_1)f(x_0) \geqslant$$

$$\geqslant (c - x_0)f(x_1) + (x_0 - c + c - x_1)f(c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (c-x_1)(f(x_0)-f(c)) \geqslant (c-x_0)(f(x_1)-f(c)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_0)-f(c)}{c-x_0} \geqslant \frac{f(x_1)-f(c)}{c-x_1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(c)-f(x_0)}{c-x_0} \leqslant \frac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}.$$

Переходя к пределу при $x_0 \to c$, получаем из последнего неравенства, что $f'(c) \leqslant \dfrac{f(c)-f(x_1)}{c-x_1}$ для любой точки $x_1 \in (c-\delta, c)$.

Аналогично можно показать, что $f'(c) \leqslant \dfrac{f(x_1)-f(c)}{x_1-c}$, если $x_1 \in (c, c+\delta)$. Это означает, что $r(x) \leqslant 0$ при $x \in (c-\delta, c)$, $r(c) = 0$ и $r(x) \geqslant 0$ при $x \in (c, c+\delta)$, то есть функция $r(x)$ не убывает в точке c. □

Теорема 7.7. (Необходимое условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке c и точка $M(c, f(c))$ является точкой перегиба $f(x)$. Тогда $f''(c) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f''(c) \neq 0$. Рассмотрим функцию
$$r(x) = f(x) - (f(c) + f'(c)(x-c)).$$

Для нее будут выполнены условия: $r'(c) = f'(c) - f'(c) = 0$, $r''(c) = f''(c) \neq 0$. Это означает, что c — точка строгого локального экстремума функции $r(x)$, что противоречит доказанной выше лемме. Значит, наше предположение неверно, и $f''(c) = 0$. □

Замечание 7.5. *Условие $f''(c) = 0$ не является достаточным условием перегиба. Например, для функции $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, но перегиба в точке 0 нет.*

Теорема 7.8. (Первое достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в проколотой δ-окрестности точки c для некоторого $\delta > 0$ и пусть существует $f'(c)$. Тогда, если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, то c — точка перегиба графика $f(x)$.*

Доказательство. Если $f''(x)$ имеет разные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$, значит, функция $f(x)$ имеет разные направления выпуклости на этих промежутках (теорема 7.5). Но это по определению означает, что c — точка перегиба. □

Замечание 7.6. *Иногда при определении точки перегиба допускается, чтобы $f'(c) = \infty$, то есть чтобы график функции $f(x)$ имел вертикальную касательную в точке c. При таком определении, например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет перегиб в точке 0. Возможна ситуация, когда функция имеет различные направления выпуклости по разные стороны от точки c, но в самой точке не определена (например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$). В этом случае точка c не считается точкой перегиба графика функции $f(x)$.*

Теорема 7.9. (Второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки c, причем $f''(c) = 0$ и пусть существует $f'''(c) \neq 0$. Тогда c — точка перегиба графика $f(x)$.*

Доказательство. Предположим, что $f'''(c) < 0 (> 0)$. Тогда функция $f''(x)$ убывает (возрастает) в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f''(x) > f''(c) = 0$ $(f''(x) < f''(c) = 0)$ при всех $x \in (c-\delta, c)$ и $f''(x) < f''(c) = 0$ $(f''(x) > f''(c) = 0)$ при всех $x \in (c, c+\delta)$. Согласно теореме 7.8, это означает, что x — точка перегиба графика функции $f(x)$. □

Теорема 7.10. (Третье достаточное условие перегиба). *Пусть n — некоторое четное натуральное число. Если функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки c и существует $f^{(n+1)}(c)$, причем $f''(c) = f'''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то c — точка перегиба графика функции $f(x)$.*

Доказательство. Случай $n = 2$ уже рассмотрен в теореме 7.9. Пусть n — четное натуральное число, $n \geqslant 4$, $f^{(n+1)}(c) \neq 0$.

Тогда функция $f^{(n)}(x)$ строго монотонна в точке c, следовательно, найдется такое число $\delta > 0$, что $f^{(n)}(x)$ имеет различные знаки на промежутках $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ (поскольку $f^{(n)}(c) = 0$). Пусть x — произвольная точка из проколотой δ–окрестности точки c. Применим разложение Тейлора с центром в точке c к функции $f''(x)$:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{(4)}(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-3)!}(x-c)^{n-3} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}.$$

Здесь ξ — некоторая точка, лежащая между c и x. Поскольку $f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0$, то получаем, что $f''(x) = \dfrac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-c)^{n-2}$. Выражение $f^{(n)}(\xi)(x-c)^{n-2}$ имеет различные знаки на интервалах $(c-\delta, c)$ и $(c, c+\delta)$ (так как $n-2$ — четное число). Значит, $f''(x)$ также имеет различные знаки на этих промежутках, то есть c — точка перегиба (теорема 7.8). $\square$

Определение 7.6. *Прямая $x = a$ называется* ***вертикальной асимптотой*** *к графику функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.*

Определение 7.7. *Прямая $y = kx + b$ называется* ***наклонной асимптотой*** *к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$. Если $k = 0$, то прямую $y = b$ называют в таком случае* ***горизонтальной асимптотой****.*

Теорема 7.11. *Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой к графику функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(-\infty)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)} (f(x) - kx) = b$.*

Доказательство. Для определенности будем рассматривать случай $x \to +\infty$.

Необходимость. Пусть $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b + \alpha(x)}{x}\right) = k;$$

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$. Тогда $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. $\square$

Глава 2.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ.

§1. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Для построения графика функции $f(x)$ одной переменной необходимо выполнить ее исследование по следующей примерной схеме.

1) Найти область определения D_f заданной функции $f(x)$ и, по возможности, ее область значений E_f.

2) Определить, является ли функция $f(x)$ четной, нечетной или функцией общего вида (то есть ни четной, ни нечетной), является ли она периодической.

3) Найти, если возможно, точки пересечения графика функции с осями координат, то есть вычислить $f(0)$ и те значения переменной x, где $f(x) = 0$.

4) Найти промежутки непрерывности данной функции и точки разрыва ее графика (если они имеются). В каждой точке разрыва указать левый и правый односторонние пределы функции и ее значение в самой точке разрыва (если они определены). Указать вертикальные асимптоты к графику $f(x)$ (если они имеются). На основании этого указать род каждой точки разрыва.

5) Исследовать поведение функции на бесконечности. Найти, по возможности, наклонные асимптоты к ее графику.

РЕКОМЕНДАЦИЯ: *после выполнения пунктов 1)- 5) можно сделать черновой набросок графика, на котором видно поведение функции около ее точек разрыва, а также вертикальные и наклонные асимптоты.*

6) Указать области, где функция $f(x)$ дифференцируема, вычислить ее первую производную $f'(x)$. Указать точки, где производная отсутствует, вычислить в каждой из них, по возможности, правую и левую производные. Это поможет более точно изобразить график $f(x)$ в окрестности каждой такой точки.

7) В области дифференцируемости функции указать (по знаку производной) интервалы монотонности функции. Найти стационарные точки, то есть такие, где $f'(x) = 0$, если такие имеются.

8) Вычислить вторую производную данной функции $f''(x)$, где это возможно. Указать точки, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует. В этих точках вычислить, по возможности, первую производную $f'(x)$.

9) По знаку второй производной $f''(x)$ указать интервалы, где функция $f(x)$ выпукла вверх, и те, где она выпукла вниз.

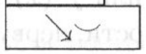
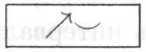
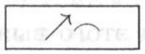
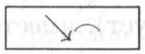
10) Исследовать функцию на экстремум. Для этого выяснить для каждой критической точки (то есть для каждой такой точки, где либо $f'(x) = 0$, либо $f'(x)$ не существует), имеется ли в ней локальный экстремум и охарактеризовать его (строгий или нет, максимум или минимум, каково значение функции f в этой точке). Воспользоваться для этого известными вам достаточными условиями существования локального экстремума или его определением.

РЕКОМЕНДАЦИЯ: *после выполнения пунктов 6)-10) можно уточнить набросок графика, отметив на нем точки экстремумов, учитывая направление выпуклости и монотонности функции f.*

11) Исследовать график данной функции на перегибы. Для этого установить, в каких точках из тех, где $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует, имеются перегибы графика. Воспользоваться известными достаточными условиями перегиба или его определением. Вычислить значение первой производной $f'(x)$ в каждой точке перегиба. Это позволит более точно изобразить график функции $f(x)$ в окрестности этой точки.

12) Для более аккуратного построения графика вычислить (вручную или с помощью калькулятора или соответствующих таблиц) значения функции f в некоторых дополнительных точках, где проведенное исследование не дает полного представления о графике.

РЕКОМЕНДАЦИЯ: перед окончательным построением графика удобно собрать все полученные сведения о поведении функции $f(x)$ в таблицу (см. примеры). В клетках этой таблицы рекомендуем использовать (для краткости записей) следующие условные обозначения:

$\boxed{\oplus}$	или	$\boxed{>0}$	— *функция положительна;*
$\boxed{\ominus}$	или	$\boxed{<0}$	— *функция отрицательна;*
			— *функция убывает и выпукла вниз;*
			— *функция возрастает и выпукла вниз;*
			— *функция возрастает и выпукла вверх;*
			— *функция убывает и выпукла вверх;*
$\boxed{\pm\infty}$	или	$\boxed{\infty}$	— *функция является бесконечно большой (с соответствующим знаком);*
$\boxed{-}$	или	$\boxed{\text{нет}}$	— *функция не определена, ее значение отсутствует.*

Составленная таблица результатов позволит еще раз проверить и подкорректировать черновой вариант графика, если потребуется.

Чистовой вариант графика функции желательно выполнить на отдельном листе (миллиметровой) бумаги, расположив его и выбрав масштабы измерения по осям координат так, чтобы на чертеже были видны все характерные детали графика, а также чтобы график занимал большую часть листа. На чертеже следует отметить координаты всех характерных точек графика: экстремумов, перегибов, разрывов.

Пунктиром следует провести все асимптоты. В точках перегибов и тех экстремумов, где нет первой производной, следует тонкой короткой линией показать направление касательной или правой и левой касательных (если они существуют и если это не будет слишком загромождать чертеж). График функции $f(x)$ должен быть изображен сплошной (но не слишком толстой) линией.

ПРИМЕР 1. Провести подробное исследование и построить график следующей функции:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2}\cdot e^x, & x \leqslant 0; \\[2ex] \dfrac{2x^2}{3(1-x)}, & x > 0. \end{cases}$$

Проведем исследование данной функции по предложенному выше плану.

1) Область определения этой функции

$$D_f = (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty).$$

Область значений $E_f = (-\infty; +\infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Иногда определить область значений функции в начале исследования довольно сложно. В таких случаях это можно сделать в одном из последних пунктов исследования.

2) $f(x)$ - функция общего вида.

3) $f(0) = 0.5$; $f(x) = 0$ при $x = -1$.

4) $f(x)$ непрерывна всюду на числовой оси, за исключением точек: $x = -2, x = 0, x = 1$. В точке $x = 0$ имеется неустранимый разрыв первого рода, причем $f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = 0.5$; $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} f(x) = 0$. В точках $x = -2$ и $x = 1$ имеются разрывы второго рода. Функция в этих точках не определена, и $\lim\limits_{x\to-2\pm0} f(x) = \mp\infty$; $\lim\limits_{x\to1\pm0} f(x) = \mp\infty$. Вертикальные асимптоты к графику: $L_1 : x = -2$; $L_2 : x = 1$.

5) Поведение функции на бесконечности. Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\frac{2}{3};\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) + \frac{2x}{3}\right) = -\frac{2}{3};$$

Поэтому горизонтальной левой асимптотой является прямая $L_3 : y = 0$; наклонной правой асимптотой является прямая $L_4 : y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

Следуя рекомендациям, выполним набросок графика (Рис. 1).

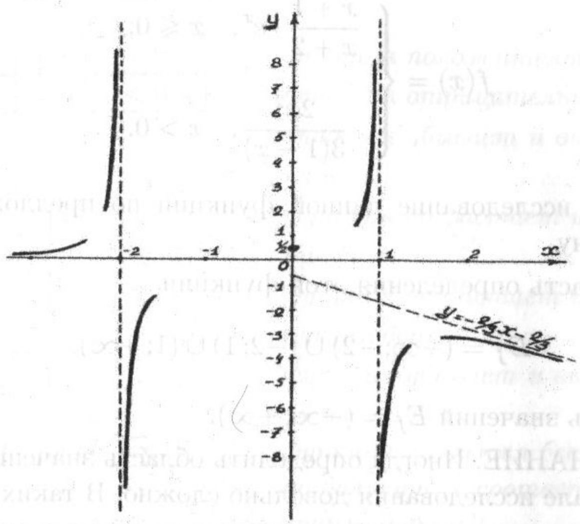


Рис. 1: Первый набросок графика

6) Данная функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = -2, x = 0, x = 1$. Первая производная имеет следующий вид:

$$y' = f'(x) = \begin{cases} e^x \cdot \dfrac{x^2+3x+3}{(x+2)^2}, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{2x(2-x)}{3(1-x)^2}, & x > 0. \end{cases}$$

В точке $x = 0$ имеются левая и правая производные:

$$f'(-0) = \lim_{x \to -0} f'(x) = 0.75; f'(+0) = \lim_{x \to +0} f'(x) = 0;$$

7) Функция монотонно возрастает на каждом из множеств

$$(-\infty; -2), \quad (-2; 0), \quad (0; 1), \quad (1; 2).$$

Функция монотонно убывает при $x \in [2; +\infty)$. Стационарная точка $x = 2$.

8) Вычислим вторую производную.

$$y'' = f''(x) = \begin{cases} e^x \cdot \dfrac{(x+1)(x^2+4x+6)}{(x+2)^3}, & x \leqslant 0; \\ \dfrac{4}{3(1-x)^3}, & x > 0. \end{cases}$$

Отметим, что $f''(x) = 0$ при $x = -1$. $f''(x)$ не существует при $x = -2; x = 1, x = 0$. При этом $f'(-1) = e^{-1}, f''(2) = -\frac{4}{3}$.

9) Функция выпукла вверх на множестве

$$(-2; -1) \cup (1; +\infty),$$

функция выпукла вниз на множестве

$$(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; 1).$$

10) Исследуем данную функцию на экстремум. По результатам пунктов 7) и 8) получаем, что в точке $x = 2$ функция имеет локальный максимум, причем строгий. $f(2) = -\frac{8}{3}$. Других экстремумов нет.

Уточняем набросок графика (Рис. 2).

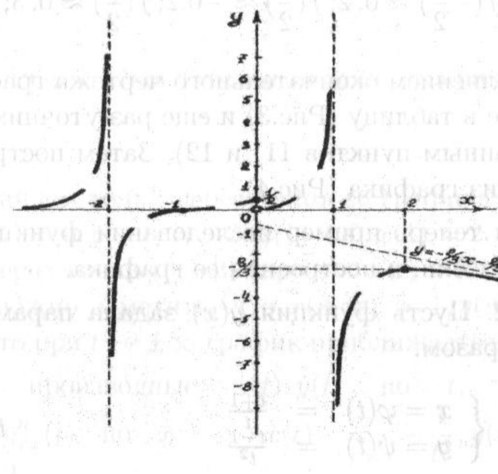


Рис. 2: Второй набросок графика

11) Исследуем график данной функции на перегибы. По данным пунктов 8) и 9), изменения направления выпуклости графика функции имеются в точках $x = -2, x = -1, x = 1$. При этом касательная существует только в точке $x = -1$, и $f'(-1) = e^{-1}$. Следовательно, перегиб имеется только в точке $x = -1$, и обобщенные перегибы как изменения направления выпуклости графика имеются в точках $x = -2, x = 1$.

x	$(-\infty;-2)$	$-2-0$	$-2+0$	$(-2;-1)$	-1	$(-1;0)$	-0	0	$+0$	$(0;1)$	$1-0$	1	$1+0$	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
y	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/2$	$1/2$	0	$\nearrow$	$+\infty$	—	$-\infty$	$\nearrow$	$-8/3$	$\searrow$
y'	>0	$+\infty$	$+\infty$	>0	e^{-1}	>0	$3/4$	—	0	>0	$+\infty$	—	$+\infty$	>0	0	<0
y''	>0	$+\infty$	$-\infty$	<0	0	>0	$3/4$	—	$4/3$	>0	$+\infty$	—	$-\infty$	<0	$-4/3$	<0
Примечания	$y=0$ асимптота	Разрыв II рода $x=-2$ асимпт.		—	перегиб	—	Разрыв I рода Неустранимый			—	Разрыв II рода $x=1$ - асимпт.			—	Локал. max.	$y=-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$ асимп.

Рис. 3: Сводная таблица данных

12) Для более точного изображения графика данной функции вычислим некоторые значения функции.

$$f(-3) \approx 0.1; f(-\frac{1}{2}) \approx 0,2; f(\frac{3}{2}) \approx -0.2; f(\frac{1}{2}) \approx 0,3; f(3) = 3.$$

Перед выполнением окончательного чертежа графика соберем все данные в таблицу (Рис.3) и еще раз уточним набросок графика по данным пунктов 11) и 12). Затем построим окончательный эскиз графика (Рис.4).

Рассмотрим теперь пример исследования функции, заданной параметрически, и построения ее графика.

ПРИМЕР 2. Пусть функция $y(x)$ задана параметрически следующим образом.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) & = \frac{t+1}{t} \\ y = \psi(t) & = \frac{t-1}{t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Поскольку функция $\varphi(t)$ обратима, то представленные формулы удовлетворяют определению функции, заданной парамет-

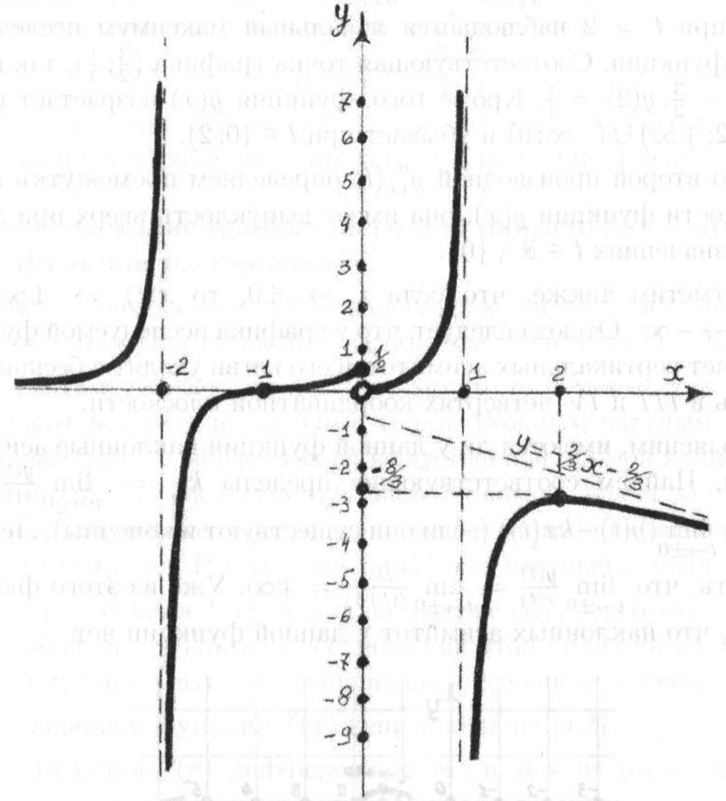


Рис. 4: Окончательный эскиз графика

рически. Найдем точки пересечения ее графика с осями координат: $x(-1) = 0, y(-1) = -2, y(1) = 0, x(1) = 2$. Итак, график проходит через точки $(0; -2)$ (при $t = -1$) и $(2; 0)$ (при $t = 1$). Далее, несложно заметить, что $x(\pm\infty) = 1, y(\pm\infty) = 0$. Это означает, что при $t \to \pm\infty$ график приближается к точке $(1; 0)$.

Найдем производные $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ по t, и производные $y'_x(t), y''_{xx}(t)$ по x. $\dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2}, \dot{y}(t) = \frac{2-t}{t^3}$; $y'_x(t) = \frac{t-2}{t}, y''_{xx} = -2$.

Замечаем, что $y'_x(2) = 0, y''_{xx}(2) = -2 < 0$. Это означает, что при $t = 2$ наблюдается локальный максимум исследуемой функции. Соответствующая точка графика $(\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$, так как $x(2) = \frac{3}{2}, y(2) = \frac{1}{4}$. Кроме того, функция $y(x)$ возрастает при $t \in (2; +\infty) \cup (-\infty; 0)$ и убывает при $t \in (0; 2)$.

По второй производной $y''_{xx}(t)$ определяем промежутки выпуклости функции $y(x)$: она имеет выпуклость вверх при любых значениях $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Отметим также, что если $t \to \pm 0$, то $x(t) \to \pm\infty$, а $y(t) \to -\infty$. Отсюда следует, что у графика исследуемой функции нет вертикальных асимптот, и его ветви уходят в бесконечность в III и IV четвертях координатной плоскости.

Выясним, имеются ли у данной функции наклонные асимптоты. Найдём соответствующие пределы $k_\pm = \lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{y(t)}{x(t)}$ и $b_\pm = \lim\limits_{t\to\pm 0} (y(t) - kx(t))$ (если они существуют и конечны). Легко видеть, что $\lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\pm 0} \frac{t-1}{t(t+1)} = \mp\infty$. Уже из этого факта ясно, что наклонных асимптот у данной функции нет.

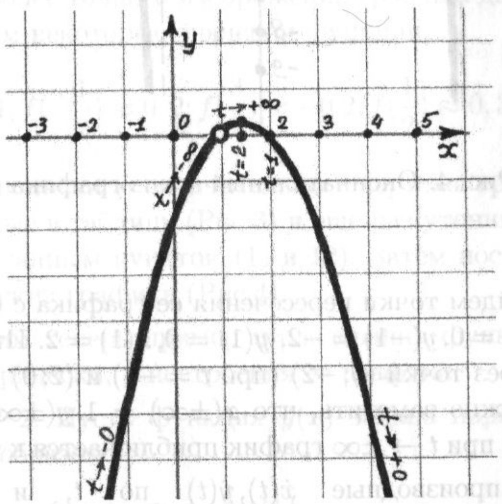


Рис. 5:

Для более точного построения графика укажем еще про-

изводные (то есть направления касательных) и координаты некоторых дополнительных точек: $y'_x(\pm\infty) = 1, y'_x(1) = -1$; $y'_x(\mp 0) = \pm\infty$, $x(-2) = \dfrac{1}{2}, y(-2) = -\dfrac{3}{4}$.

На основании полученных данных несложно изобразить эскиз графика параметрически заданной функции (Рис.5).

§2. **Отыскание наибольшего или наименьшего значения функции на множестве.**

Рассмотрим задачу: найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)$ на данном замкнутом множестве $A \subseteq \mathbb{R}$.

Отметим, что по определению замкнутого множества, оно содержит все свои предельные точки. Важным частным случаем замкнутого множества на вещественной прямой является замкнутый отрезок (сегмент). Часто ставится задача об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции на замкнутом отрезке. Рассмотрим ниже этот частный случай.

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения этой функции на $[a; b]$. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) заданная функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$;

2) функция $f(x)$ дифференцируема всюду на $(a; b)$, за исключением не более чем конечного числа точек;

3) производная функции $f'(x)$ обращается в нуль на интервале $(a; b)$ не более чем в конечном числе точек .

Тогда, в силу второй теоремы Вейерштрасса, функция $f(x)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на заданном отрезке $[a; b]$. Они могут достигаться либо на концах отрезка $[a; b]$ (краевые экстремумы), либо во внутренних точках. Если экстремальное значение функции достигается во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, и функция $f(x)$ дифференцируема в точке c, то имеем равенство: $f'(c) = 0$ (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции). Либо в точке c функция $f(x)$ не является дифференцируемой. Кстати, точки, где либо производная функции $f(x)$ равна нулю, либо не существует, называют ее *критическими точками*.

В силу условий 1)-3), множество точек, где функция может достигать своих наибольшего и наименьшего значений, не более чем конечно.

Если найдены все эти точки: $a, b, c_1, ...c_m$, то для решения поставленной задачи остаётся лишь вычислить значения функции $f(a), f(b), f(c_1), ..., f(c_m)$, сравнить их по величине и выбрать среди них наибольшее и наименьшее.

Если вычисление значений функции в найденных точках затруднительно, то можно проверить достаточные условия для существования локального минимума или максимума в каждой из них.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если требуется решить прикладную задачу о нахождении наибольшего и/или наименьшего значения некоторой величины, то следует подобрать (по возможности, простейшую) функцию одной переменной так, чтобы решение поставленной задачи было эквивалентно нахождению наибольшего и/или наименьшего значения этой функции на некотором множестве (обычно на отрезке или интервале), который тоже, конечно, определяется из условий исходной задачи. Тем самым ставится формальная математическая задача на отыскание наибольшего и/или наименьшего значения функции одной переменной. Следует решить эту формальную задачу, пользуясь необходимым теоретическим материалом. Затем из ответа этой формальной задачи следует получить ответ поставленной прикладной задачи.

ПРИМЕР 1. *При каких размерах открытая цилиндрическая ванна (Рис.6) с полукруглым поперечным сечением будет вмещать наибольшую массу раствора, если внешняя поверхность ванны равна $S = 7m^2$? Толщина стенок ванны предполагается малой сравнительно с ее размерами, и при решении задачи ею можно пренебречь.*

РЕШЕНИЕ. Введем следующие *обозначения:* M - масса раствора, вмещающегося в ванну, ρ - плотность раствора, V - внутренний объем ванны, l - длина ванны, h - высота ванны (равная радиусу ее поперечного сечения).

ШАГ 1 (подбор функции и множества). Из условия задачи

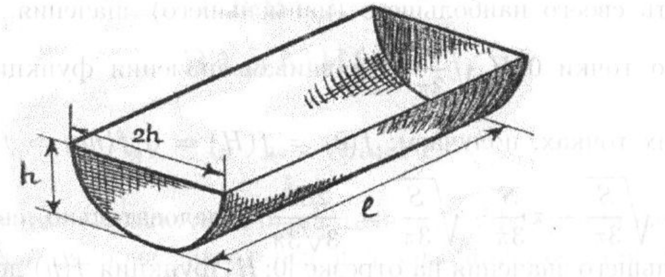


Рис. 6:

имеем: $M = \rho \cdot V$, $S = \pi \cdot h^2 + \pi \cdot h \cdot l$. Из последнего равенства находим, что $l = \dfrac{S - \pi \cdot h^2}{\pi \cdot h} = \dfrac{S}{\pi \cdot h} - h$. Далее, используя формулу для объема ванны и подставляя туда выражение для ее длины l, получаем: $V = \dfrac{\pi \cdot h^2 \cdot l}{2} = \dfrac{S \cdot h - \pi \cdot h^3}{2}$. Кроме того, из выражения внешней поверхности ванны $S = \pi \cdot h^2 + \pi \cdot h \cdot l$ легко видеть, что высота ванны может изменяться от нуля до своего теоретически максимального значения $H = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ (которое достигается при $l = 0$).

Пользуясь этим, формулируем следующую математическую задачу:

найти наибольшее значение функции $f(h) = S \cdot h - \pi \cdot h^3$ *на отрезке* $[0; H]$, *где* $H = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}}$.

ШАГ 2. Найдем критические точки данной функции $f(h)$ на указанном отрезке. Функция $f(h)$ дифференцируема во всей области определения. Вычислим и приравняем нулю ее производную : $f'(h) = S - 3\pi \cdot h^2 = 0$. Отсюда имеем: $h = \pm\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$. Так как отрицательный корень не лежит в указанном отрезке, то получаем единственную критическую точку данной функции на отрезке $[0; H]$. Это точка $h_0 = \sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$. Таким образом, все точки, где функция $f(h)$ может достигнуть своего наибольшего (наименьшего) значения, найдены. Это точки $0, H, \sqrt{\frac{S}{3\pi}}$. Сравнивая значения функции $f(h)$ в этих точках, получаем: $f(0) = f(H) = 0, f(h_0) = f(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}) = S\cdot\sqrt{\frac{S}{3\pi}} - \pi\frac{S}{3\pi}\cdot\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \frac{2S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}}$. Следовательно, своего наибольшего значения на отрезке $[0;H]$ функция $f(h)$ достигает в точке $\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$, и оно равно $\frac{2S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}}$.

ШАГ 3. Поскольку величина массы раствора в ванне выражается через $f(h)$ по формуле $M = \rho\cdot\frac{1}{2}f(h)$, то очевидно, что наибольшее возможное значение массы раствора в ванне равно $M_{\text{макс.}} = \rho\cdot\frac{1}{2}f(\sqrt{\frac{S}{3\pi}}) = \frac{\rho\cdot S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}}$.

Окончательно, считая плотность раствора равной $\rho = 1t/m^3$ (одна тонна на кубический метр) и подставляя заданное значение внешней поверхности ванны $S = 7m^2$ в формулу для ее объема, получаем численный ответ.

$$M_{\text{макс.}} = \frac{\rho\cdot S^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\pi}} = \frac{7^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\cdot 3.14}}t/m^3\cdot m^3 \approx 2.01t.$$

Это достигается при следующих значениях высоты и длины ванны: $h_0 = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \approx 0.862m$,

$l_0 = \frac{S}{\pi\sqrt{\frac{S}{3\pi}}} - \sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{S}{\pi}}(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = 2h_0 \approx 1.724m$

ОТВЕТ. Максимально возможная масса раствора в ванне $M_{\text{макс.}} = \frac{7^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3\cdot3.14}}t \approx 2.01t$. При этом оптимальные высота и длина ванны равны соответственно $h_0 = \sqrt{\frac{S}{3\pi}} \approx 0.862m$, $l_0 = 2h_0 \approx 1.724m$

Глава 3.

ЗАДАЧИ

§1. Задачи к главе 1

Рассмотрим вначале задачи на технику дифференцирования функций, включая некоторые полезные приемы вычисления производных.

Задачи на дифференцирование суммы, произведения, частного функций и сложной функции

Пример 1. *Найти производные функций, указав их области определения:*

$$а)\ y = 5\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x} + 7; \quad б)\ y = x\,\mathrm{sh}\,x; \quad в)\ y = \frac{\ln x - 1}{\cos x}.$$

Решение. а) $y' = 5\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + 2\left(x^{-1}\right)' + 7' = 5\cdot\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\left(-x^{-2}\right) = $

$= \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}, x \neq 0;$

б) $y' = (x)'\cdot\mathrm{sh}\,x + x\cdot(\mathrm{sh}\,x)' = \mathrm{sh}\,x + x\,\mathrm{ch}\,x,\ x\in\mathbb{R};$

в) $y' = \frac{(\ln x - 1)'\cos x - (\ln x - 1)(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\frac{\cos x}{x} + (\ln x - 1)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + x(\ln x - 1)\sin x}{x\cos^2 x},$$

$x > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ □

Пример 2. *Найти производные сложных функций (ответ не упрощать):*

$$а)\ y = \log_7(\cos^5 x); \quad б)\ y = \arcsin(\sin^2 x); \quad в)\ y = \mathrm{arctg}(\mathrm{th}\,x).$$

Решение. а) $y' = (\log_7(\cos^5 x))' = \frac{1}{\cos^5 x\cdot\ln 7}\cdot 5\cos^4 x\cdot(-\sin x)$ при $\cos x > 0$.

б) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^4 x}}\cdot 2\sin x\cdot\cos x = \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\sin^2 x)}} =$

$$= \frac{2\sin x \cdot \cos x}{|\cos x|\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

Используя функцию "сигнум" (знак числа)

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ 1, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

и тождество $x = |x| \cdot \operatorname{sgn} x$, приведем ответ к виду:

$$y' = \frac{2\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}, \cos x \neq 0.$$

в) $y' = \dfrac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x} =$

$$= 1/\operatorname{ch} 2x, \ x \in \mathbb{R}. \ \square$$

Пример 3. *Найти производные сложных функций:*

а) $y = \lg(\lg(\lg x))$; *б)* $y = \arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$; *в)* $y = \operatorname{tg}\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right)$.

Решение. а) $y' = \dfrac{1}{\lg(\lg x)\cdot \ln 10} \cdot \dfrac{1}{\lg x \cdot \ln 10} \cdot \dfrac{1}{x \ln 10}, \ x > 0.$

б) $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}} \cdot \left(-\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \cdot \operatorname{sh} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2 x - 1}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} =$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x}}{|\operatorname{ch} x|} \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x} \cdot \operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x| \cdot \operatorname{ch} x} =$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}, \ x \neq 0;$$

в) $y' = \dfrac{1}{\cos^2\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right)} \cdot \cos\left(\sqrt{x^5+x}\right) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^5+x}} \cdot (5x^4+1),$

при условии $\cos\left(\sin\sqrt{x^5+x}\right) \neq 0$, $x^5 + x > 0$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти производные сложных функций с указанием их области дифференцируемости (ответ можно не упрощать):

1.1. $y = \sin^5(\cos^2 x)$;

1.2. $y = 10^{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x^2-8}}$;

1.3. $y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$;

1.4. $y = \arccos(\cos^2 x)$;

1.5. $y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$;

1.6. $y = \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x + 3x^2}}}$.

Обратимся, далее, к специальным случаям дифференцирования и рассмотрим несколько приемов, используемых при дифференцировании показательно-степенных[1] функций, произведений нескольких функций и в ряде других ситуаций.

Дифференцирование показательно-степенных функций.

Пусть требуется найти производную функции $y = u^v$ $(u > 0)$ в предположении, что функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы. Обратимся к приему, состоящему в предварительном логарифмировании функции. А именно, прологарифмируем это равенство по основанию e:

$$\ln y = \ln(u^v) = v \ln u,$$

и затем продифференцируем его по переменной x:

$$(\ln y)' = (v \ln u)' \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \cdot \frac{u'}{u},$$

откуда находим искомую производную

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + \frac{vu'}{u}\right).$$

Пример 4. *Найти производные показательно-степенных функций, используя предварительное логарифмирование:*

а) $y = x^x$; *б)* $y = (1+4x)^{\operatorname{ctg} x}$ *в)* $y = x^{a^x}$, $a > 0$.

Решение. а) Прологарифмируем равенство $y = x^x$ при $x > 0$ по основанию e: $\ln y = \ln(x^x) = x \ln x$. Теперь продифференцируем по x полученное равенство:

---

[1]Показательно-степенной называется функция u^v, где $u(x), v(x)$ – элементарные функции, $u(x) > 0$.

$$\frac{y'}{y} = (x\ln x)' \quad \Leftrightarrow \quad y' = y\left(\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

б) Имеем $\ln y = \ln(1+4x)^{\operatorname{ctg} x} = \operatorname{ctg} x \ln(1+4x)$, тогда $\dfrac{y'}{y} = (\operatorname{ctg} x\ln(1+4x))' \Rightarrow$

$$y' = y\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\ln(1+4x) + \operatorname{ctg} x\cdot\frac{4}{1+4x}\right),$$

где $x > -\dfrac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$.

в) Логарифмируя, находим $\ln y = a^x \ln x$. Дифференцируя затем по x, при $x > 0$ получаем

$$\frac{y'}{y} = (a^x \ln a)\ln x + a^x\cdot\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = x^{a^x}a^x\left(\ln a\ln x + \frac{1}{x}\right). \square$$

Рассмотрим другой прием дифференцирования показательно-степенных функций, состоящий в переходе к экспоненте в основании степени:

$$y = u^v = e^{\ln(u^v)} = e^{v\ln u}.$$

Тогда, дифференцируя последнее равенство как сложную функцию, получаем тот же результат, что и выше:

$$y' = (e^{v\ln u})' = e^{v\ln u}(v\ln u)' = u^v\left(v'\ln u + \frac{vu'}{u}\right).$$

Пример 5. *Найти y', переходя к экспоненте в основании:*
а) $y = x^x$; б) $y = (1+4x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Решение. а) $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$, тогда $y' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(\ln x + 1)$, $x > 0$.

б) $y = e^{\ln(1+4x)^{\operatorname{ctg} x}} = e^{\operatorname{ctg} x\ln(1+4x)}$ и при $x > -\dfrac{1}{4}$, $\sin x \neq 0$ имеем

$$y' = (e^{\operatorname{ctg} x\ln(1+4x)})' = e^{\operatorname{ctg} x\ln(1+4x)}(\operatorname{ctg} x\ln(1+4x))' =$$

$$= (1+4x)^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\ln(1+4x) + \operatorname{ctg} x\cdot\frac{1}{1+4x}\cdot 4\right). \square$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти производные показательно-степенных функций:

1.7. $y = x^{\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$;

1.8. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$;

1.9. $y = (\sin x)^{\cos x}$ $(\sin x > 0)$.

1.10. $y = x^{\sqrt{x}^x}$ $(x > 0)$.

Дифференцирование произведения трех и более функций.

Если дифференцируемая функция имеет вид произведения нескольких сомножителей $u = u_1\cdot u_2\cdot\ldots\cdot u_n$, то либо применяют формулу дифференцирования произведения

$$(u_1u_2...u_n)' = u_1'u_2...u_n + u_1u_2'...u_n + ... + u_1u_2...u_n'$$

(доказывается индукцией), либо, если сомножители u_i положительны, используют предварительное логарифмирование:

$$\ln(u_1u_2...u_n) = \ln u_1 + \ln u_2 + ... + \ln u_n,$$

после чего дифференцируют (сумму дифференцировать проще, чем произведение):

$$\frac{y'}{y} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + ... + \frac{u_n'}{u_n}$$

и в конце умножают на y.

Пример 6. *Используя формулу производной произведения, найти y', если*

$$y = \sqrt[3]{x^4}\cdot\arcsin 2x\cdot 2^{\sin x}.$$

Решение. Так как $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, то при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ имеем:

$$y' = (x^{\frac{4}{3}})'\cdot\arcsin 2x\cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4}\cdot(\arcsin 2x)'\,2^{\sin x} +$$

$$+\sqrt[3]{x^4}\cdot\arcsin 2x\cdot(2^{\sin x})' = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}\cdot\arcsin 2x\cdot 2^{\sin x} +$$

$$+\sqrt[3]{x^4}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\cdot 2^{\sin x} + \sqrt[3]{x^4}\cdot\arcsin 2x\cdot 2^{\sin x}\cdot\ln 2\cdot\cos x. \square$$

Пример 7. *Найти производные положительных функций, используя предварительное логарифмирование:*

$$а)\ y = \sqrt[7]{x^3} \cdot \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \cdot (x^2+2x)^3,\ x > 1;$$

$$б)\ y = \frac{\sqrt{x+2} \cdot (3-x)^6}{(x-1)^3 \cdot \sqrt[4]{3x-2}},\ x > 3.$$

Решение. а) $\ln y = \ln \sqrt[7]{x^3} + \ln \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + \ln(x^2+2x)^3 \Leftrightarrow$

$$\ln y = \frac{3}{7}\ln x + \frac{1}{4}\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(x+1) + 3\ln x + 3\ln(x+2).$$

Дифференцируя полученное равенство, получаем

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2} \Rightarrow$$

$$y' = y\left(\frac{3}{7x} + \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+2}\right), \quad x > 1.$$

б) $\ln y = \frac{1}{2}\ln(x+2) + 6\ln(x-3) - 3\ln(x-1) - \frac{1}{4}\ln(3x-2) \Rightarrow$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2(x+2)} + \frac{6}{x-3} - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{4(3x-2)}$$ и так далее. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Используя формулу дифференцирования произведения нескольких функций, найти производную:

1.11. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$;

1.12. $y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \ (a > 0, b > 0)$.

Предварительное упрощение, использование особенностей задачи. Перед дифференцированием функции следует проверить, можно ли ее предварительно упростить, приведя к виду, удобному для дифференцирования. Иногда в задаче рассматривается частный случай, позволяющий избежать громоздкого решения в общем виде.

Пример 8. *Найти $f'(1)$, если*

$$f(x) = (x-1)\left(\sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1} + (x-1)\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}\right).$$

Решение. Здесь существенно используется особенность функции, а именно, если $f(x) = (x-1)g(x)$ и функция $g(x)$ дифференцируема в точке $x = 1$, то $f'(x) = g(x) + (x-1)g'(x)$; соответственно $f'(1) = g(1)$. В нашем случае $g(x) = \sqrt[4]{x+\sqrt{x}-1} + (x-1)\sqrt[5]{x+2\sqrt[4]{x}}$ и $g(1) = 1$, поэтому $f'(1) = 1$. □

Пример 9. *Найти $y'(0)$, если $y = x(x-1)(x-2)(x-3)$ $...(x-2000)$.*

Решение. $y'(x) = (x-1)(x-2)(x-3)...(x-2000) + x(x-2)(x-3)$ $...(x-2000) + x(x-1)(x-3)...(x-2000) + ... + x(x-1)(x-2)(x-3)...$ $(x-1999)$. Тогда $y'(0) = 2000!$, так как все слагаемые, кроме первого, содержат множитель x, обращающий соответствующее произведение в нуль при $x = 0$. □

Пример 10. *Найти производные функций, предварительно упростив их и приведя к виду, удобному для дифференцирования:*

а) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$; *б)* $y = \log_{\sin x} \cos x$; *в)* $y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x)$.

Решение. а) $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1-\cos 4x) =$ $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x$. Продифференцировав, получим

$$y' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4x\right)' = -\sin 4x,\ x \in \mathbb{R}.$$

б) $y = \frac{\ln\cos x}{\ln\sin x}$, поэтому, дифференцируя частное, получим

$$y' = \frac{-\operatorname{tg} x \cdot \ln\sin x - \operatorname{ctg} x \cdot \ln\cos x}{\ln^2 \sin x},$$

где $\sin x > 0, \cos x > 0, \sin x \neq 1$.

в) Так как $y = \lg(\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x) = \lg 1$, то $y' \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти производную функции, вначале упростив ее:

1.13. $y = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2\,x}$;

1.14. $y = 4\,\mathrm{sh}^3\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x$;

1.15. $y = (\arcsin x + \arccos x)x$;

1.16. $y = \log_x(x+1)\cdot\log_{x+1}(x+2)\cdot\log_{x+2}(x+3)\cdot\ldots$ $\cdot\log_{x+2014}(x+2015)$, $x > 1$.

1.17. $y = \sqrt{1+x^4+\sin^2 x + 2x^2 + 2\sin x + 2x^2\sin x}$.

1.18. Доказать формулу для производной дробно-линейной функции:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}, \text{ где } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

есть определитель второго порядка.

Введение промежуточной переменной и сведение к сложной функции. Если переменная x в записи функции присутствует только в составе некоторого повторяющегося выражения, то его целесообразно заменить новой переменной, и затем воспользоваться формулой для дифференцирования сложных функций.

Пример 11. *Найти производную функции, вводя промежуточную переменную и используя правило дифференцирования сложной функции:*

$$а)\ y = \frac{5\sin^2 x + 1}{\ln(\sin x + 2)};\quad б)\ y = e^{n\ln x}(\cos(n\ln x) + \sin(n\ln x)).$$

Решение. а) Введем промежуточную переменную $t = \sin x$ и получим суперпозицию функций $y = u(t(x))$, где $u(t) = \dfrac{5t^2+1}{\ln(t+2)}$. По теореме о дифференцировании сложной функции

$$y'(x) = u'(t)t'(x) = \frac{10t\ln(t+2) - (5t^2+1)\cdot\frac{1}{t+2}}{\ln^2(t+2)}\cdot\cos x.$$

(здесь всего лишь один раз в самом конце осуществляется умножение на $t'(x)$).

б) Положим $t = n\ln x$, тогда $y = u(t(x))$. Поскольку $u' = (e^t(\cos t + \sin t))' = 2e^t\cos t$, то окончательно получим

$$y'(x) = u'(t)t'(x) = 2e^{n\ln x}\cos(n\ln x)\cdot\frac{n}{x},\ x > 0. \ \square$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

Найти производную функции, вводя промежуточную переменную и используя правило дифференцирования сложной функции:

1.19. $y = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$;

1.20. $y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x})$;

1.21. $y = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt[4]{1+x^4}\right) + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

Вычисление производных и дифференциалов при помощи определений и свойств дифференцируемых функций:

Пример 12. *Для функции $f(x) = x^3 - 2x + 1$ определить в точке $x = 1$:*

1) приращение функции $\Delta f(1)$; 2) дифференциал $df(1)$.

Решение. 1) По определению приращения функции в точке,

$$\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^3 - 2(1+\Delta x) + 1 =$$
$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

2) По определению дифференциала функции в точке, главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции есть дифференциал, т.е. $df(1) = \Delta x$.

С другой стороны, для нахождения дифференциала в точке $x = 1$ можно было воспользоваться известной формулой для дифференциала первого порядка. Найдя предварительно $f'(x) = (3x^2 - 2)|_{x=1} = 1$, получаем тот же результат:

$$df(1) = f'(1)\cdot\Delta x = \Delta x. \ \square$$

Пример 13. *Найти:*
$$а)\ \frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9);\quad б)\ \frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Решение. При $x\neq 0$ имеем:
$$а)\ \frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{d(x^3-2x^6-x^9)}{d(x^3)}=$$
$$=\frac{(3x^2-12x^5-9x^8)dx}{3x^2dx}=1-4x^3-3x^6;$$
$$б)\ \frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{d\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{d(x^2)}=\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}dx}{2xdx}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}.\ \square$$

Пример 14. *Найти dy и d^2y, если*
$$y(x)=(u(x)-2)\ln(1+v(x)),$$
где $u(x),v(x)$ – дважды дифференцируемые функции независимой переменной x.

Решение. $dy=y'dx=\left(u'\ln(1+v)+(u-2)\frac{v'}{1+v}\right)dx;$
$$d^2y=y''dx^2=$$
$$=\left(u''\ln(1+v)+2\frac{u'v'}{1+v}+(u-2)\frac{v''(1+v)-(v')^2}{(1+v)^2}\right)dx^2.\ \square$$

Пример 15. *Найти dy и d^2y, если $y=f(u)$ – дважды дифференцируемая функция, $u(x)=e^{4x}\cos 2x$.*

Решение. По формулам для первого и второго дифференциалов имеем:
$$dy=f'(u)du,\quad d^2y=f''(u)du^2+f'(u)d^2u,$$
где $du=u'(x)dx=$
$$=(4e^{4x}\cos 2x+e^{4x}(-2\sin 2x))dx=2e^{4x}(2\cos 2x-\sin 2x)dx,$$
$$d^2u=u''(x)dx^2=4e^{4x}(3\cos 2x-4\sin 2x)dx^2.$$

Подставляя, окончательно получим:
$$dy=f'(u)\cdot 2e^{4x}(2\cos 2x-\sin 2x)dx,$$
$$d^2y=f''(u)(2e^{4x}(2\cos 2x-\sin 2x)dx)^2+$$
$$+f'(u)\cdot 4e^{4x}(3\cos 2x-4\sin 2x)dx^2.\ \square$$

Пример 16. *Показать, что функция*
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x \text{ – рационально;}\\ 0, & \text{если } x \text{ – иррационально,}\end{cases}$$
имеет производную лишь при $x=0$.

Решение. 1) Покажем, что в точке $x=0$ функция дифференцируема. По определению производной,
$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}.$$
Докажем, что этот предел существует и равен нулю. Действительно, возьмем произвольно малое $\varepsilon>0$ и рассмотрим
$$\left|\frac{f(\Delta x)}{\Delta x}\right|\leqslant\left|\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}\right|=|\Delta x|<\varepsilon,$$
как только $|\Delta x|<\delta=\varepsilon$.

2) Покажем, что при $x\neq 0$ не существует $f'(x)$. От противного. Предположим, что производная $f'(x)$ существует и конечна. Но тогда функция $f(x)$ должна быть непрерывна при этом x. Однако рассматриваемая функция разрывна в каждой такой точке. Противоречие. $\square$

Пример 17. *Пусть*
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\leqslant x_0;\\ ax+b, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$
Как следует подобрать коэффициенты a и b так, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x=x_0$?

Решение. 1) Запишем в точке $x=x_0$ условие непрерывности:
$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)\ \Leftrightarrow\ x_0^2=ax_0+b.\qquad(1)$$

2) Выпишем условие дифференцируемости в точке $x = x_0$: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Найдем, по определению, односторонние производные:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0-0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0-0} \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = 2x_0,$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0+0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0+0} \frac{ax+b-(ax_0+b)}{x-x_0} = a.$$

Тогда условие дифференцируемости примет вид:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) \Leftrightarrow 2x_0 = a. \qquad (2)$$

Решая систему (1)-(2), находим $a = 2x_0$, $b = -x_0^2$.

Замечание. Дифференцируемость функции при $x = x_0$ означает, что в точке $(x_0, f(x_0))$, где парабола "переходит" в прямую, эти две кривые имеют общую касательную. □

Пример 18. *При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ функция*

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

а) непрерывна при $x = 0$; б) дифференцируема при $x = 0$;

в) непрерывно дифференцируема (имеет непрерывную производную) при $x = 0$?

Решение. а) Согласно определению непрерывности функции в точке $x = 0$, должно выполняться условие

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(x^\alpha \sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Очевидно, что данный предел существует и равен нулю лишь при $\alpha > 0$. Поэтому функция $f(x)$ непрерывна в нуле при $\alpha > 0$.

б) Найдем производную в точке $x = 0$ по определению:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\left(x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x}\right).$$

Этот предел существует лишь при $\alpha > 1$ и равен нулю. Итак, функция $f(x)$ дифференцируема в нуле при $\alpha > 1$.

в) Найдем в окрестности точки $x = 0$ производную:

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Для непрерывности $f'(x)$ в нуле необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\alpha x^{\alpha-1} \sin\frac{1}{x} - x^{\alpha-2}\cos\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Пределы обоих слагаемых существуют лишь при $\alpha > 2$ и при этом равны 0. Поэтому функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема в нуле при $\alpha > 2$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.22. Пусть $f(x) = |\pi^2 - x^2|\sin^2 x$. Во всех ли точках дифференцируема эта функция? Найти $f'(\pi)$ и $f'(-\pi)$ в случае утвердительного ответа.

1.23. При каком значении параметра a существует $f'(0)$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}, & \text{при } x < 0; \\ ax, & \text{при } x \geqslant 0? \end{cases}$$

1.24. При каких значениях параметров a и b функция дифференцируема на всей числовой прямой:

$$f(x) = \begin{cases} x^x, & \text{при } x > 1; \\ a + bx^2, & \text{при } x \leqslant 1? \end{cases}$$

Объяснить, почему функция не дифференцируема ни в одной точке:

1.25. $y = \sqrt{\log_2(\sin x)}$;

1.26. $y = \sin(\arccos(\operatorname{ch}(x^2))) \cdot \cos(\arcsin(\operatorname{ch}(x^2)))$;

1.27. $y = \arcsin\left(\operatorname{sh}^4(x + 4\sin(xe^{\pi x})) + 2^{x^2+1}\right)$.

1.28. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$?

Задачи на вычисление производных и дифференциалов функций, заданных неявно:

Пример 19. *Найти $y'(x)$ и $y''(x)$, а также dy и d^2y, если* $y+\ln y+x^3=0$.

Решение. Продифференцируем уравнение один раз:

$$y'+\frac{y'}{y}+3x^2=0 \quad \left(\Rightarrow\ y'=-\frac{3x^2y}{y+1}\right)$$

и еще раз:

$$y''+\frac{y''y-(y')^2}{y^2}+6x=0.$$

Выражая из полученного равенства вторую производную, получим:

$$y''=\frac{(y')^2-6xy^2}{y^2+y} \quad (y>0).$$

Замечание 1. Если подставить в выражение для второй производной найденное выше выражение для y', то получим y'' через x и y:

$$y''=\frac{9x^4y-6xy(y+1)^2}{(y+1)^3}.$$

Замечание 2. Можно было для нахождения y'' продифференцировать вычисленную перед этим первую производную:

$$y''=(y')'=\left(-\frac{3x^2y}{y+1}\right)'=-3\frac{(x^2y)'(y+1)-x^2y(y+1)'}{(y+1)^2}=$$

$$=-3\frac{(2xy+x^2y')(y+1)-x^2yy'}{(y+1)^2}=$$

$$=-3\frac{(2xy+x^2(-\frac{3x^2y}{y+1}))(y+1)-x^2y(-\frac{3x^2y}{y+1})}{(y+1)^2}=\ldots$$

Для нахождения дифференциалов dy и d^2y в случае, когда производные известны и x – независимая переменная, воспользуемся формулами $dy=y'dx$, $d^2y=y''dx^2$:

$$dy=-\frac{3x^2y}{y+1}dx, \quad d^2y=\frac{9x^4y-6xy(y+1)^2}{(y+1)^3}dx^2. \ \square$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.29. Найти производную неявно заданной функции, определив ее явный вид $y=y(x)$: $\sqrt[3]{xy}=\sin(\log_5 x)$.

1.30. Найти $g'(x)$, если известно, что для всех $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=5-2x$, $f(2-3g(x))=13-24x$.

1.31. Найти производную y'_x от функции, заданной в неявном виде: $x^2+2xy-y^2=2x$. Чему равно y' при $x=2$ и $y=4$?

1.32. Найти dy и d^2y, если $y+\ln y+x^3=0$.

1.33. Функция $y=y(x)$ определяется из уравнения $x^3+y^3-y^5=x$. Написать уравнения касательной и нормали к графику этой функции в точке $x=1$, если $y(1)=1$.

Задачи на вычисление производных функций, заданных параметрически:

Пример 20. *Найти y'_x и y''_{x^2}, если $x=e^t\cos t$, $y=e^t\sin t$.*

Решение. 1) $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{e^t(\sin t+\cos t)}{e^t(\cos t-\sin t)}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right).$$

2) $y''_{x^2}=\dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\dfrac{(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+t\right))'_t}{x'_t}=\dfrac{\frac{1}{\cos^2(\frac{\pi}{4}+t)}}{e^t\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}=$

$$=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2}\cos^3\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}, \text{ где } \cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\neq 0. \ \square$$

Пример 21. *Написать уравнения касательной и нормали к кривой $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ в точке $t=0$.*

Решение. Уравнение касательной в точке $(x_0,y(x_0))$ к графику функции $y=y(x)$:

$$y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0),$$

а уравнение нормали:

$$y=y(x_0)-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0).$$

Найдем $x_0 = x(0) = 0$, $y_0 = y(0) = 0$, тогда $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{3-3t^2}{2-2t}$
$\Rightarrow y'_x|_{t=0} = \dfrac{3}{2}$.

Уравнение касательной: $y = 0 + \dfrac{3}{2}(x-0) = \dfrac{3}{2}x$, т.е. $3x - 2y = 0$.

Уравнение нормали: $y = 0 - \dfrac{2}{3}(x-0) = -\dfrac{2}{3}x$, т.е. $2x + 3y = 0$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.34. Найти $y'(x)$, приведя функцию, заданную параметрически: $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \arccos t, \end{cases}$ где $t \in [-1, 1]$, к явному виду.

1.35. Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} функции $y = f(x)$, заданной параметрически $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ где $t \in \mathbb{R}$.

Задачи на нахождение обратных функций и их производных:

Пример 22. *Найти функцию, обратную к функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2} + \pi n, \dfrac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Решение. 1) $n = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$: $y = \sin x \Rightarrow \arcsin y = \arcsin(\sin x)$. В силу периодичности синуса имеем $\arcsin y = \arcsin(\sin(x - \pi n))$. Для упрощения этого равенства воспользуемся тождеством $\arcsin(\sin(\alpha)) = \alpha$, где $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Так как на рассматриваемом отрезке $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x - \pi n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin(x - \pi n)) = x - \pi n$ и получаем: $\arcsin y = x - \pi n$, откуда $x = \arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Переобозначив x на y, а y на x, имеем обратную функцию: $y = \arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $n = 2k + 1$: $\arcsin y = \arcsin(\sin(\pi n - x))$. Так как $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \pi n - x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin(x - \pi n)) = \pi n - x$ и получаем: $\arcsin y = \pi n - x$, откуда $x = -\arcsin y + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или, заменив x на y, а y на x, имеем обратную функцию: $y = -\arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Ответ можно записать в единой форме: $y = (-1)^n \arcsin x + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 23. *Найти обратную функцию $x = x(y)$, если $y = x + [x]$.*

Решение. На каждом из полуинтервалов $n \leqslant x < n + 1$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) функция $y(x)$ непрерывна и строго монотонна, поэтому у нее существует обратная функция. Найдем ее. Так как при $n \leqslant x < n + 1$ имеем $[x] = n$, то $y = x + n$, откуда $x = y - n$, где $n \leqslant y - n < n + 1$, т.е $2n \leqslant y < 2n + 1$.

Ответ: $x = y - n$, где $2n \leqslant y < 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Пример 24. *Найти x'_y и x''_{y^2}, если $y = xe^x$, $x > 0$.*

Решение. По теореме о производной обратной функции имеем: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{(xe^x)'_x} = \dfrac{1}{e^x(x+1)}$. Далее, $x''_{yy} = \dfrac{d}{dy}(x'_y) =$

$$= \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'_x}\right) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{y'_x}\right) = \frac{1}{y'_x}\left(-\frac{1}{(y')^2} \cdot y''\right) = -\frac{1}{(y')^3} y''_{xx}.$$

Поэтому в данной задаче имеем

$$x''_{yy} = -\frac{1}{(y')^3} y''_{xx} = -\frac{1}{(e^x(x+1))^3}(e^x(x+2)) = -\frac{x+2}{e^{2x}(x+1)^3}. \ \square$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.36. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x - \text{рационально;} \\ -x, & \text{если } x - \text{иррационально.} \end{cases}$$

1.37. Определить однозначные непрерывные ветви обратной функции для функции $y = \operatorname{tg} x$.

1.38. Найти производную функции, имеющей название ареасинус и являющейся обратной к гиперболическому синусу $y = \operatorname{sh} x$, двумя способами:

а) найдя ареасинус и затем продифференцировав его;

б) не находя обратной функции (по теореме о производной обратной функции).

1.39. Функция $f(t)$ с областью определения $D(f) = [1, +\infty)$ удовлетворяет уравнению $f\left(\frac{1}{2}(4^y + 4^{-y})\right) = y$ для любого $y \geq 0$. Найти производную обратной функции $f^{-1}(y)$ и установить ее знак.

Задачи на вычисление производных и дифференциалов высших порядков ($n > 2$):

Пример 25. *Найти $y^{(20)}(x)$ и $d^{20}y(x)$, если $y = x^2e^{2x}$.*

Решение. Положим $u = x^2$, $v = e^{2x}$, тогда $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = ... = u^{(20)} = 0$, $v' = 2e^{2x}$, $v'' = 2^2e^{2x}$,..., $v^{(20)} = 2^{20}e^{2x}$. Вычислив коэффициенты $C_{20}^0 = 1$, $C_{20}^1 = 20$, $C_{20}^2 = \frac{20!}{2!18!} = 190$, подставим в формулу Лейбница[1]:

$$(x^2e^{2x})^{(20)} = C_{20}^0u^{(0)}v^{(20)} + C_{20}^1u'v^{(19)} + C_{20}^2u''v^{(18)} =$$

$$= x^2\cdot 2^{20}\cdot e^{2x} + 20\cdot 2x\cdot 2^{19}\cdot e^{2x} + 190\cdot 2\cdot 2^{18}\cdot e^{2x} = 2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95).$$

Тогда, умножая обе части полученного равенства на dx^{20}, получим выражение для дифференциала соответствующего порядка (x – независимая переменная):

$$d^{20}y(x) = 2^{20}e^{2x}(x^2 + 20x + 95)dx^{20}. \ \square$$

Пример 26. *Найти $y^{(n)}(x)$, если $y = \sin ax \cdot \sin bx$.*

Решение. Известно, что $\cos^{(n)} x = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$. Представим функцию в виде $y = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x)$, тогда

$$y^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\Big((a-b)^n \cos\Big((a-b)x + \frac{\pi n}{2}\Big) -$$

$$- (a+b)^n \cos\Big((a+b)x + \frac{\pi n}{2}\Big)\Big). \ \square$$

Пример 27. *Найти $y^{(n)}(0)$, если $y = \operatorname{arctg} x$.*

Решение. Записать общую формулу для $y^{(n)}(x)$ – дело трудное. Однако прием, при помощи которого можно вычислить $y^{(n)}(0)$, заслуживает упоминания.

[1]Формула Лейбница особенно эффективна, когда одна из функций имеет только конечное число ненулевых производных (например, является многочленом).

Из равенства $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ следует $y'(1+x^2) = 1$. Применим формулу Лейбница к произведению $y'(1+x^2)$, положив $u = y'$, $v = 1 + x^2$:

$$(1 + x^2)y^{(n+1)} + 2nxy^{(n)} + n(n-1)y^{(n-1)} = 0.$$

Подставляя $x = 0$, получим $y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0)$. Отсюда, учитывая, что $y'(0) = 1$, найдем $y'''(0) = -2$, $y^{(5)}(0) = 24$. Вообще, для производных нечетного порядка имеем: $y^{(2n+1)}(0) = -2n(2n-1)y^{(2n-1)}(0) = (-1)^n(2n)!$ Производные четного порядка равны нулю, т.к. $y''(0) = 0$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.40. Найти $y^{(50)}(x)$ и $d^{50}y(x)$, а также $d^{50}y(1)$, если $y = x^2 \sin 2x$.

1.41. Найти $y^{(n)}(x)$, если $y = \dfrac{1}{x^2 - a^2}$.

1.42. Найти $d^ny(x)$, если $y = (x^2 - 7x)e^{-3x}$. Чему равен $d^ny(0)$?

Вычисление пределов функций с помощью правила Лопиталя:[1]**.**

Пример 28. *Найти* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x}$ *(x>0).*

Решение. Убедимся, что все условия 1-го правила Лопиталя выполнены. В самом деле, 1) функции $f(x) = x^x - 1$ и $g(x) = \ln x$ определены и непрерывны в правой достаточно малой проколотой окрестности точки $x = 1$ и $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$; 2) производные $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ и $g'(x) = 1/x$ существуют в этой окрестности и одновременно не обращаются в нуль $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$; 3) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x(\ln x + 1)}{\frac{1}{x}} = 1$. Применяя правило Лопиталя, получаем: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - 1}{\ln x} \overset{[\text{л}]}{=} \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$. $\square$

[1]Буква "л" над знаком равенства $\overset{[\text{л}]}{=}$ означает применение правила Лопиталя.

Пример 29. *Найти* $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{10}-2x^5+1}{x^{15}-2x^6+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{10}-2x^5+1}{x^{15}-2x^6+1}\overset{[\text{Л}]}{=}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^{10}-2x^5+1)'}{(x^{15}-2x^6+1)'}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{10x^9-10x^4}{15x^{14}-12x^5}=0.\ \square$$

Пример 30. *Найти* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}}\overset{[\text{Л}]}{=}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{3x^2}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\sin x}{6x}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-\cos x}{6}}=e^{-\frac{1}{6}}.\ \square$$

Пример 31. *Найти* $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Решение. Пусть $t=\arcsin x\ \Rightarrow x=\sin t$, тогда

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{\sin t}\right)^{\frac{1}{\sin^2 t}}\overset{[1^\infty]}{=}e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln\frac{t}{\sin t}}{\sin^2 t}}\overset{[\text{Л}]}{=}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{t}\left(\frac{t}{\sin t}\right)'}{2\sin t\cos t}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t-t\cos t}{t\sin^2 t}}\overset{[\text{Л}]}{=}e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{t\sin t}{\sin^2 t+2t\sin t\cos t}}=$$

$$=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{t}{\sin t+2t\cos t}}=e^{\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to0}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}+2\cos t}}=e^{\frac{1}{6}}.\ \square$$

Замечание 1. Правила Лопиталя являются лишь достаточным условием для существования предела отношения двух бесконечно малых (бесконечно больших) функций, поэтому если предел отношения производных не существует или нарушается какое-либо другое условие применимости этих правил, то это, вообще говоря, еще не означает, что нет предела отношения исходных величин. Проиллюстрируем это примерами.

Пример 32. *Применимо ли правило Лопиталя для вычисления предела* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$?

Решение. Рассмотрим при $x\to\infty$ две бесконечно большие функции: $f(x)=x+\sin x$ и $g(x)=x$. Предел их отношения, очевидно, существует:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=1+0=1;$$

в то же время отношение производных дает

$$\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\frac{1+\cos x}{1}=1+\cos x,$$

а эта функция не имеет предела при $x\to\infty$. Следовательно, для вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$ правило Лопиталя неприменимо. $\square$

Пример 33. *Исследовать возможность применения правила Лопиталя для предела*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cdot\cos x}{(x+\sin x\cdot\cos x)e^{\sin x}}.$$

Решение. Формальное применение правила Лопиталя дает результат, равный 0. В действительности, этот предел не существует, так как он равен

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1+\sin x\cdot\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x\cdot\cos x}{x}}\right)e^{-\sin x}=\lim_{x\to\infty}e^{-\sin x}$$

(выражение в скобках стремится к единице). Причина этому кроется в том, что нарушается условие одновременного необращения в нуль производных при $x\to\infty$. Действительно,

$$f'(x)=2\cos^2 x,\ g'(x)=\cos x\left(2\cos x e^{\sin x}+(x+\sin x\cos x)e^{\sin x}\right),$$

и при $\cos x=0$, т.е. $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in\mathbb{Z})$, получаем $(f'(x))^2+(g'(x))^2=0.\ \square$

Замечание 2. Правила Лопиталя иногда приходится применять много раз подряд, пока не получится предел, значение которого либо очевидно, либо может быть вычислено каким-либо известным способом.

Пример 34. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\overset{[\text{Л}]}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}\overset{[\text{Л}]}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\sin x}{6x}\overset{[\text{Л}]}{=}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}.\ \square$$

Пример 35. *Доказать, что при $\alpha > 0$:*

$$а)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0; \quad б)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

(показательная функция на бесконечности растет быстрее, а логарифмическая – медленнее степенной функции).

Для доказательства применим правило Лопиталя: в примере а) – n раз, в примере б) – всего один раз:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} =$$

$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n!}{e^x} = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = 0. \ \square$$

Пример 36. *Вычислить предел* $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^x - x - 2\sqrt{1+x}}{x^2} \overset{[Л]}{=} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2e^x - 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x}}}{2x} \overset{[Л]}{=}$

$$= \lim_{x\to0} \frac{2e^x + \frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}}}{2} = \frac{5}{4}. \ \square$$

Замечание 3. При всех своих достоинствах правила Лопиталя не являются эффективными во всех случаях, когда применимы. К недостаткам этого метода можно отнести большое количество и рутинность вычислений, которые возникают в некоторых случаях, например,

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos x \cdot \arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^5}.$$

Очевидно, вычисление уже только первых двух производных приводит к большим выкладкам, а дифференцировать здесь нужно, видимо, 5 раз. В такой ситуации надо пользоваться другими, более удобными средствами вычисления пределов, например – разложениями функций по формуле Тейлора.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.43. Найти $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

1.44. Найти $\lim\limits_{x\to+0} (\arcsin x)^{2x}$.

1.45. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1.46. Исследовать на дифференцируемость в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0; \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

Задачи на формулу Тейлора:

Пример 37. *Разложить функцию $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{3}$ до членов 5-го порядка включительно.*

Решение. По формуле Тейлора в окрестности точки $x = \dfrac{\pi}{3}$ имеем: $\sin x =$

$$= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 +$$

$$+ \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5!}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right)$$

Так как $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(x) = \cos x\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}$, $f''(x) = -\sin x\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $f'''(x) = -\cos x\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2}$, $f^{(4)}(x) = \sin x\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $f^{(5)}(x) = \cos x\big|_{x=\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{2}$, то получаем разложение

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5\right). \ \square$$

Пример 38. *Найти разложение функции $f(x) = e^{2x-x^2}$ по целым неотрицательным степеням переменной x (в окрестности точки $x = 0$) до члена с x^5 включительно.*

Решение. Так как x близко к нулю, то и $2x-x^2$ также близко к нулю, а значит, можно воспользоваться стандартным разложением экспоненциальной функции $e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+...+\frac{t^5}{5!}+o(t^5)$, подставив вместо t выражение $2x-x^2$. Раскрывая скобки и записывая все члены порядка выше 5 как $o(x^5)$, получим:

$$e^{2x-x^2} = 1+(2x-x^2)+\frac{(2x-x^2)^2}{2!}+\frac{(2x-x^2)^3}{3!}+\frac{(2x-x^2)^4}{4!}+$$

$$+\frac{(2x-x^2)^5}{5!}+o((2x-x^2)^5) = 1+2x-x^2+\frac{1}{2}(4x^2-4x^3+x^4)+$$

$$+\frac{1}{6}((2x)^3-3(2x)^2x^2+3(2x)(x^2)^2)+\frac{1}{24}((2x)^4-4(2x)^3x^2)+$$

$$+\frac{1}{120}(2x)^5+o(x^5) = 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5).$$

Здесь при упрощении использовалось, что $o((2x-x^2)^5) = o(x^5)$. Докажем это. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o((2x-x^2)^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{o((2x-x^2)^5)}{(2x-x^2)^5}\cdot\frac{(2x-x^2)^5}{x^5}\right) = 0. \square$$

Пример 39. *Найти разложение функции $f(x) = \sin(\sin x)$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 включительно.*

Решение. Разложение по целым неотрицательным степеням переменной x предполагает разложение в окрестности точки $x_0 = 0$. Так как при $x \to 0$ имеем $\sin x \to 0$, то, подставляя в разложение $\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$ вместо t выражение $\sin x$, получаем

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(\sin^4 x) =$$

$$= (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)) - \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))^3 + o(x^4) =$$

$$= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

Здесь при упрощении использовалось, что $o(\sin^4 x) = o(x^4)$. Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{o(\sin^4 x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{o(\sin^4 x)}{\sin^4 x}\cdot\frac{\sin^4 x}{x^4}\right) = 0. \square$$

Пример 40. *Написать разложение функции $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^4 включительно. Чему равно $f^4(0)$?*

Решать задачу стандартным способом, находя производные функции до 4-го порядка включительно и подставляя их значения в точке $x=0$ в формулу Тейлора нецелесообразно ввиду больших вычислений. Поступим иначе: преобразуем функцию к виду

$$f(x) = \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{(1-x+x^2)(x+1)} = \frac{(1+x+x^2)(x+1)}{x^3+1} =$$

$$= \frac{x^3+1+2x(x+1)}{x^3+1} = 1+\frac{2x(x+1)}{x^3+1} = 1+2x(x+1)(x^3+1)^{-1}.$$

Разложим $(x^3+1)^{-1}$ в окрестности нуля до членов 4-го порядка: $(x^3+1)^{-1} = 1-x^3+o(x^5)$. Подставляя это в выражение для функции, раскрывая скобки и упорядочивая слагаемые по мере возрастания степени x, получим искомое разложение

$$f(x) = 1+2x(x+1)(1-x^3+o(x^5)) = 1+2x(x+1)(1-x^3)+$$

$$+2x(x+1)o(x^5) = 1+2x+2x^2-2x^4+(-2x^5+2x(x+1)o(x^5)) =$$

$$= 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4).$$

Далее, чтобы найти $f^4(0)$, нет необходимости вычислять производную 4-го порядка. Воспользуемся полученным разложением. Согласно формуле Маклорена,

$$f(x) = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+o(x^4),$$

поэтому, в силу единственности разложения, $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2$, откуда $f^{(4)}(0) = -48$. $\square$

Пример 41. *Функцию* $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 1)$ *разложить по целым неотрицательным степеням дроби* $\frac{1}{x}$ *до члена с* $\frac{1}{x^3}$.

Решение. Поскольку $x > 1$, то биномиальное разложение $(1+x)^m = 1+mx+o(x)$ применять нельзя. Преобразуем функцию к виду

$$f(x) = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 1\right) = x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right).$$

Поскольку $\frac{1}{x^2} < 1$, то теперь можно воспользоваться биномиальным разложением $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$ при $t = \frac{1}{x^2}$, откуда получаем

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Пример 42. *Найти такие значения коэффициентов* a, b, c, *чтобы при* $x \to 0$ *выполнялось равенство*

$$\frac{3\sin 2x}{\cos 2x + 2} = ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

Решение. Перепишем равенство в виде

$$3\sin 2x = (2+\cos 2x)(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)),\ x \to 0.$$

Подставляя разложения для синуса и косинуса, имеем:

$$3\left(2x - \frac{8x^3}{6} + \frac{32x^5}{120} + o(x^5)\right) = \left(2 + 1 - \frac{4x^2}{2} + \frac{16x^4}{24} + o(x^5)\right)\cdot$$

$$\cdot(ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5)).$$

Раскрывая скобки, упрощая и удерживая члены не выше 5-го порядка, получим:

$$6x - 4x^3 + \frac{4x^5}{5} + o(x^5) = 3ax + (3b-2a)x^3 + \left(\frac{2a}{3} - 2b + 3c\right)x^5 + o(x^5),$$

откуда находим

$$\begin{cases} 6 = 3a; \\ -4 = 3b - 2a; \\ \frac{4}{5} = \frac{2a}{3} - 2b + 3c; \end{cases} \quad \text{т.е. при} \quad \begin{cases} a = 2; \\ b = 0; \\ c = -\frac{8}{45}. \end{cases}$$

Итак, $\frac{3\sin 2x}{\cos 2x + 2} = 2x - \frac{8}{45}x^5 + o(x^5)$, $x \to 0$. □

Пример 43. *Используя разложение по формуле Маклорена, найти предел*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Решение. Воспользуемся стандартными разложениями для e^x и $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2))(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)) - x - x^2}{x^3}.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные члены и записывая степени x, большие 3, а также члены $x\cdot o(x^2)$, $\frac{x^3}{3!}\cdot o(x^2)$, $o(x^2)\cdot o(x^4)$ и подобные им как $o(x^3)$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + x\cdot o(x^2) - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x - x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}. \ \square$$

Пример 44. *Используя разложение по формуле Маклорена, для бесконечно малой при* $x \to 0$ *величины* y *определить главный член вида* Cx^n $(C = const)$, *если*

$$y = (1+x)^x - 1.$$

Решение. Поскольку главный член Cx^n эквивалентен y при $x \to 0$, то рассмотрим предел отношения y и x^n в точке $x = 0$ и выясним, при каких n он равен константе $C \neq 0$. Воспользуемся при этом двумя разложениями $e^x = 1 + x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^x - 1}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+x)} - 1}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x(x+o(x))} - 1}{x^n} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2+o(x^2)}-1}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2+o(x^2)-1}{x^n} \overset{n=2}{=} 1.$$

Таким образом, $Cx^n = x^2$. □

Пример 45. *Используя разложение по формуле Маклорена, найти приближенное значение числа $\sqrt{5}$ (например, раскладывая до членов 2-го порядка включительно) и оценить точность приближения.*

Решение. Представим число в виде $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4(1+\frac{1}{4})} = 2(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$. Оценку числа членов в биномиальном разложении $(1+\frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ по формуле Маклорена для достижения заданной точности можно получить из оценки остаточного члена в форме Лагранжа:

$$\left|R_n\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}\left(\frac{\theta}{4}\right)}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-n)(1+\frac{\theta}{4})^{\frac{1}{2}-n-1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right|.$$

В данном случае оценим точность приближения при $n=2$:

$$\left|R_2\left(\frac{1}{4}\right)\right| = \left|\frac{f^{(3)}\left(\frac{\theta}{4}\right)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(1+\frac{\theta}{4})^{-\frac{5}{2}}}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3\right| <$$

$$< 1/1024.$$

Таким образом, если написать разложение до члена 2-го порядка включительно, получим, что точное значение $\sqrt{5}$ отличается от полученного приближения

$$\sqrt{5} = 2\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) = 2,234375$$

на величину, меньшую 1/512. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.47. Разложить по формуле Маклорена $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$.

1.48. Найти $f^{(23)}(0)$, если $f(x) = \sin(x^7)\cdot\cos(x^8)$.

1.49. Используя разложение по формуле Маклорена, для бесконечно малой при $x \to 0$ функции $y = \ln(\cos(x^2))$ определить главный член вида Cx^n.

1.50. Вычислить предел функции $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - \operatorname{tg} x}$.

1.51. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+1}-x-2}{\ln(x-2)-\ln x}$.

1.52. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\sqrt{1-x^2+x^4}}{\ln(1+x^4)}$.

Задачи на теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши:

Пример 46. *Решить уравнение* $2^x = 3x - 1$.

Решение. Воспользуемся теоремой Ролля. Она нужна здесь не столько для того, чтобы найти корни, сколько для того, чтобы установить их количество. Убедимся в том, что уравнение вида $a^x = kx + b$ не может иметь более двух корней. От противного: допустим, что функция $f(x) = a^x - kx - b$ имеет три нуля, например, $x_1 < x_2 < x_3$. Тогда производная $f'(x) = a^x \ln a - k$ должна обращаться в нуль дважды: на интервалах (x_1, x_2) и (x_2, x_3). Но это невозможно, поскольку уравнение $a^x \ln a - k = 0$ имеет не более одного решения.

Теперь, возвращаясь к уравнению $2^x = 3x - 1$ и зная, что оно имеет не более двух корней, находим их подбором: $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. □

Пример 47. *Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1,-1)$ и $B(2,8)$.*

Решение. Согласно геометрическому смыслу теоремы Лагранжа, так как функция $y = x^3$ непрерывна на отрезке $[-1,2]$ и дифференцируема внутри его, то на интервале $(-1,2)$ найдется точка ξ такая, что

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = f'(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8-(-1)}{3} = 3\xi^2,$$

откуда находим $\xi = \pm 1$. Таким образом, нашлись две точки $A(-1,-1)$ и $C(1,1)$, в которых выполнено условие задачи. $\square$

Пример 48. *Доказать неравенство* $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$.

Решение. Функция $f(x) = \sin x$ всюду непрерывна и дифференцируема, поэтому применив теорему Лагранжа на произвольном отрезке $[x,y]$, получим, что найдется точка $\xi \in (x,y)$: $\sin x - \sin y = (x-y)\cos\xi$, откуда

$$|\sin x - \sin y| = |x-y||\cos\xi| \leqslant |x-y|. \square$$

Пример 49. *Функция* $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ *обращается в нуль при* $x_1 = -1$ *и* $x_2 = 1$, *но тем не менее* $f'(x) \neq 0$ *при* $-1 \leqslant x \leqslant 1$. *Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.*

Решение. Противоречия с теоремой Ролля нет, так как не выполнено одно из требований этой теоремы: функция $f(x)$ не имеет производной при $x = 0$. Действительно,

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{-\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = +\infty,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = -\infty. \square$$

Пример 50. *Объяснить, почему неверна формула Коши для функций* $f(x) = x^2$ *и* $g(x) = x^3$ *на отрезке* $[-1,1]$.

Решение. Нарушено условие теоремы Коши: $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (-1;1)$. В самом деле, в точке $x = 0$ имеем $g'(0) = 0$, т.е. формула Коши неприменима. $\square$

Пример 51. *Доказать, что если функция* $f(x)$ *имеет в конечном или бесконечном интервале* (a,b) *ограниченную производную* $f'(x)$, *то* $f(x)$ *равномерно непрерывна на* (a,b).

Доказательство. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на (a,b), если $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x', x'' \in (a,b)$ таких, что $|x'-x''| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Так как производная ограничена, то найдется $M > 0$: $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда по формуле Лагранжа для произвольной пары точек $x', x'' \in (a,b)$ имеем: $|f(x') - f(x'')| = |f'(c)||x' - x''| \leqslant M|x' - x''|$. Фиксируем любое $\varepsilon > 0$, выберем такое δ, что $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда при $|x' - x''| < \delta$ будет выполнено $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, т.е. функция $f(x)$ равномерно непрерывна на (a,b). $\square$

Пример 52. *Убедиться в том, что функции* $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$ *и* $g(x) = \operatorname{arctg} x$ *имеют одинаковые производные в областях: 1)* $x < 1$ *и 2)* $x > 1$. *Вывести зависимость между этими функциями.*

Решение. Равенство производных устанавливается непосредственным дифференцированием. Так как $f'(x) \equiv g'(x)$, то по следствию из теоремы Лагранжа $f(x) - g(x) \equiv \text{const}$, т.е.

$$f(x) - g(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x < 1; \\ C_2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Найдем C_1, для этого подставим любое значение $x < 1$, например, $x = 0$: $f(0) - g(0) = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow C_1 = \dfrac{\pi}{4}$.

Чтобы найти C_2, подставим, например, $x = 2$: $f(2) - g(2) = \operatorname{arctg}(-3) - \operatorname{arctg} 2$. Заметим, что

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-3) - \operatorname{arctg} 2) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2) = -\frac{3+2}{1-3\cdot 2} = 1.$$

При этом $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \dfrac{\pi}{2}$, следовательно $\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 2 < \pi$, но тогда $\operatorname{arctg}(-3) - \operatorname{arctg} 2 = -\dfrac{3\pi}{4}$. А значит, $C_2 = -3\pi/4$. $\square$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.53. Верна ли теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума) для функции $f(x) = |x|$ на отрезках:

а) $[-1,1]$; б) $[0,1]$?

1.54. Верна ли теорема Лагранжа для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leqslant 1; \\ 2\ln x, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

на отрезке $[0,e]$? Найти точку ξ.

1.55. Пусть $0 < a < b$. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство

$$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}.$$

Отсюда, в частности, получить неравенство:

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \text{ при } x > 0.$$

1.56. Используя теорему Лагранжа, доказать неравенство

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a-b|.$$

1.57. Объяснить, почему верна теорема Коши для функций $f(x) = x^2 + x$ и $g(x) = x^3$ на отрезке $x \in [-1,1]$. Найти точку $\xi \in (-1,1)$.

1.58. Используя Следствие 1 из теоремы Лагранжа, доказать тождество $\arcsin x + \arccos x \equiv \dfrac{\pi}{2}$, $|x| \leqslant 1$.

Задачи на возрастание (убывание) функций, решаемые с помощью производной:

Пример 53. *Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) функции* $y(x) = x + \sin x$.

Решение. Найдем производную: $y' = 1 + \cos x \geqslant 0$, причем обращение в нуль происходит в отдельных точках вида $x_k = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, вне которых производная положительна. Следовательно, функция возрастает на всей числовой прямой. $\square$

Пример 54. *Доказать, что функция* $y(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ *возрастает на интервале* $(0, +\infty)$.

Решение. Достаточно показать, что в указанном интервале $y' > 0$. В самом деле,

$$y' = \left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)' = y \cdot \left(x \ln\frac{x+1}{x}\right)' =$$

$$= y\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = y\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right).$$

По формуле конечных приращений на отрезке $[x, x+1]$ имеем:

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi}((x+1) - x) = \frac{1}{\xi}, \text{ где } \xi \in (x, x+1).$$

Таким образом, $y' = y\left(\dfrac{1}{\xi} - \dfrac{1}{x+1}\right) > 0$ при $x > 0$. $\square$

Пример 55. *Показать, что функция*

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{2}{x}, & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ – произвольно мало.

Решение. По определению, функция $f(x)$ называется возрастающей в точке x_0, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\triangle f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\triangle x = x - x_0$.

Вычислим приращение функции $f(x)$ в точке $x = 0$:

$$\triangle f(0) = f(0 + \triangle x) - f(0) = \triangle x\left(1 + \triangle x \sin\frac{2}{\triangle x}\right).$$

Очевидно, при достаточно малых по абсолютной величине $\triangle x$ приращение функции $\triangle f$ совпадает по знаку с приращением аргумента $\triangle x$, поэтому $f(x)$ возрастает при $x = 0$.

Фиксируем любое $\varepsilon > 0$ и найдем производную при $x \neq 0$:

$$f'(x) = 1 + 2x\sin\frac{2}{x} - 2\cos\frac{2}{x}.$$

Всегда можно выбрать настолько большое k, что $x'_k = \dfrac{1}{\pi k}$ и $x''_k = \dfrac{2}{\pi + 2\pi k}$ будут принадлежать интервалу $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Так как $f'(x'_k) = -1$, $f'(x''_k) = 3$, то $f(x)$ не возрастает на $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (так как производная не сохраняет определенный знак).

Вывод: если функция $f(x)$ возрастает в некоторой точке, то она не обязательно возрастает в некоторой окрестности этой точки. $\square$

Пример 56. *Исследовать на монотонность в строгом смысле функцию, заданную в полярных координатах:*

$$r = \sin 3\varphi, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}.$$

Решение. Функция возрастает там, где $r'(\varphi) > 0$, т.е.

$$3\cos 3\varphi > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 3\varphi < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} < \varphi < \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

С учетом $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$ получаем, что функция возрастает на интервале $0 < \varphi < \frac{\pi}{6}$. Легко показать, что если $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{3}$, то $r'(\varphi) < 0$ и, следовательно, функция убывает. □

Пример 57. *При каких значениях параметра $t \in \mathbb{R}$ возрастает (убывает) параметрически заданная функция*

$$\begin{cases} x = \dfrac{(t+1)^2}{4}; \\ y = \dfrac{(t-1)^2}{4}. \end{cases}$$

Решение. Найдем производную: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{\frac{t-1}{2}}{\frac{t+1}{2}} = \dfrac{t-1}{t+1}.$

Поэтому при $t \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ имеем $y'_x > 0$ и функция возрастает, а при $t \in (-1, 1)$ – убывает. □

Пример 58. *Доказать, что $e^x \geqslant 1 + x$ при любом $x \in \mathbb{R}$.*

Решение. Пусть $x \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Ее производная $f'(x) = e^x - 1 \geqslant 0$, значит, $f(x)$ не убывает на любом отрезке $[0, x]$, т.е. $f(x) \geqslant f(0)$ при $x \geqslant 0$. Но $f(0) = 0$, следовательно, $e^x - 1 - x \geqslant 0$, или $e^x \geqslant 1 + x$.

При $x \leqslant 0$ производная $f'(x) \leqslant 0$, значит, функция не возрастает на отрезках вида $[x, 0]$ и $f(x) \geqslant 0$.

Заметим, что равенство имеет место лишь при $x = 0$, так что $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1.59. Производная монотонной функции обязательно ли является монотонной?

1.60. Определить промежутки монотонности в строгом смысле: $y = x^\alpha e^{-x}$ $(\alpha > 0, x \geqslant 0)$.

1.61. Определить промежутки монотонности в строгом смысле:

$$f(x) = \begin{cases} x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x\right), & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

1.62. В дополнение к известному неравенству $\sin x < x$ при $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, доказать, что на этом интервале $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

Исследование функций на выпуклость и точки перегиба:

Пример 59. *Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции $y = x + \sin x$.*

Решение. Найдем вторую производную: $y'' = -\sin x$. Функция в строгом смысле выпукла вниз там, где $y'' = -\sin x > 0$, т.е. на интервалах вида $(-\pi + 2\pi n, 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Соответственно, функция выпукла вверх, если $y' < 0$, т.е. при $x \in (2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$. При этом $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, – точки перегиба. □

Пример 60. *Найти промежутки выпуклости вверх (вниз) и точки перегиба графика функции $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.*

Решение. Найдем производные:

$$y' = \frac{(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^4}}, \quad y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x(x-3)(x+3)}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^7}}.$$

Так как $y'' > 0$ при $x \in (-\infty, -3) \bigcup (-1, 0) \bigcup (1, 3)$, то функция выпукла вниз на этих интервалах. При $x \in (-3, -1) \bigcup (0, 1) \bigcup (3, +\infty)$ имеем $y'' < 0$, значит, функция выпукла вверх. В точках $x = 0, \pm 3$ $y'' = 0$ и при прохождении через эти точки вторая производная меняет знак. Следовательно, $(0, 0)$, $(3, \frac{3}{2})$, $(3, \frac{3}{2})$ – точки перегиба графика функции. В точках $x = \pm 1$ функция не определена (через эти точки проходят вертикальные асимптоты). □

Пример 61. *Исследовать направления выпуклости циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.*

Решение. Циклоида относится к трансцендентным кривым. Представим, что круг радиуса a катится по прямой Ox без скольжения. Пусть в начальный момент $t = 0$ точка окружности M находится в начале координат. Тогда траектория движения точки M будет описываться циклоидой.

Применяя правило дифференцирования функций, заданных параметрически, найдем y'_x, y''_{x^2}:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)_t}{x'_t} = -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}.$$

Отсюда следует, что при $a > 0$ $y''_{x^2} < 0$, если $t \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, т.е. на каждом из интервалов $(2\pi ka, 2\pi a(k+1))$ циклоида выпукла вверх. Точек перегиба нет. □

Пример 62. *Доказать неравенство:*

$$\frac{x^n + y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

$(x > 0,\, y > 0,\, x \neq y,\, n > 1)$.

Доказательство. Так как для степенной функции $f(x) = x^n$ в данном случае имеем $f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0$, то функция выпукла вниз на $(0, +\infty)$. Тогда для произвольных $0 < x < y$ в силу неравенства Йенсена получим:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x)+f(y)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x+y}{2}\right)^n < \frac{x^n+y^n}{2}. \ \square$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.63. Доказать, что если функция $f(g)$ – выпукла вниз и возрастает, а $g(x)$ – выпукла вниз, то сложная функция $y = f(g(x))$ – выпукла вниз. Предполагается, что обе функции f и g – дважды дифференцируемы.

1.64. Найти промежутки выпуклости определенного знака и точки перегиба графика функции $y = x^x$ $(x > 0)$.

1.65. При каких значениях параметра a кривая $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ будет иметь выпуклость, направленную вниз на всей числовой прямой?

1.66. Доказать неравенство $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$ $(x \neq y)$.

Исследование функций на локальные экстремумы и нахождение наименьшего и наибольшего значений функции:

Пример 63. *Исследовать на локальные экстремумы функцию* $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение. Найдем первую производную:

$$y' = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Критические точки 1 рода: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$, $x_{4,5} = \pm 1$.

Согласно первому достаточному условию экстремума (*Теорема 7.2*), в точке $x_3 = -\sqrt{3}$ производная равна нулю и меняет знак с плюса на минус. Следовательно, это точка локального максимума, причем значение максимума равно $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

В точке $x_2 = \sqrt{3}$ производная обращается в нуль и меняет знак с минуса на плюс. Поэтому это будет точка локального минимума, причем минимум равен $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

В точке $x_1 = 0$ производная равна нулю, но не меняет знака при прохождении через эту точку, поэтому экстремума в этой точке нет.

Наконец, в точках $x_{4,5} = \pm 1$ экстремума также нет, поскольку в указанных точках функция не определена. □

Пример 64. *Исследовать на экстремум в точке* $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} |x|(2 + \cos\frac{1}{x}), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся тем, что если существует окрестность точки, в пределах которой приращение функции сохраняет один и тот же знак, то эта точка является точкой локального экстремума. Придадим в точке $x = 0$ аргументу приращение $\triangle x$ и исследуем знак соответствующего приращения функции:

$$\triangle f(0) = f(\triangle x) - f(0) = |\triangle x| \left(2 + \cos\frac{1}{\triangle x}\right) > 0$$

для любого достаточно малого $\triangle x$. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет локальный минимум, равный нулю. □

Пример 65. *Исследовать на экстремумы функцию*

$$y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Решение. Найдем стационарные точки (в которых производная равна нулю):

$$y' = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) e^{-x} -$$

$$-\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x} = -\frac{x^n}{n!} e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Проверим достаточные условия. Если n – четно, то $y' < 0$ как слева, так и справа от $x = 0$, следовательно, экстремума нет. Если же n – нечетно, то $y' < 0$ при $x > 0$ и $y' > 0$ при $x < 0$, следовательно имеем максимум в точке $x = 0$, равный $y(0) = 1$. □

Пример 66. *Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает? Рассмотреть пример*

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0; \\ 2, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Решение. Вообще говоря, нельзя. Например, непрерывная функция $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ имеет максимум, так как $f(x) - f(0) = -x^2\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right) < 0$ для любого x. В то же время производная $f'(x) = -4x - 2x\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, в любом из интервалов $(-\delta, 0)$ и $(0, \delta)$, где $\delta > 0$ – произвольно мало, принимает разные по знаку значения (рассмотрите, например, последовательности $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ и $x''_n = \dfrac{1}{\pi + 2\pi n}$, для которых

$f'(x'_n) = -\dfrac{2}{\pi n} + 1 > 0$, но $f'(x''_n) = -\dfrac{4}{\pi + 2\pi n} - 1 < 0$) и, следовательно, в каждом таком интервале функция не является монотонной. □

Пример 67. *Доказать, что если функция $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.*

Решение. Пусть в точке x_0 достигается максимум функции $f(x)$. Тогда при всех x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0) \equiv f_0$. Так как функция $\varphi(x)$ монотонно возрастает в строгом смысле, то из неравенства $f < f_0$ следует неравенство $\varphi(f) < \varphi(f_0)$, что и требовалось доказать.

Аналогично, предположив, что в точке x_0 функция $\varphi(f(x))$ достигает максимума, придем к выводу, что функция $f(x)$ также достигает максимума в этой точке. □

Пример 68. *Доказать неравенство:*

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ и } p > 1.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x^p + (1-x)^p$ и найдем ее наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[0, 1]$. Ее производная $f'(x) = p(x^{p-1} - (1-x)^{p-1})$ обращается в нуль в точке $x = \dfrac{1}{2}$. Сравнивая числа $f(0) = 1$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, $f(1) = 1$, находим, что $\max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = 1$, $\min\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x) = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, и неравенство становится очевидным. □

Пример 69. *Найти локальные экстремумы кривой, заданной параметрически:*

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 8t^2 - 4t^3, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Решение. Найдем первую производную:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2t(4 - 3t)}{1 - t}.$$

Критическим точкам соответствуют значения параметра $t = 0$, $t = 4/3$ и $t = 1$.

При $t = 0$ и $t = 4/3$ касательная к кривой горизонтальна ($y' = 0$), а при $t = 1$ – вертикальна ($y' \to \infty$). При $t = 1$ переменная x достигает своего наибольшего значения, равного 1, и в этой точке не может быть локального экстремума. В точках $t = 0$ и $t = 4/3$ производная y' обращается в нуль и при прохождении этих точек меняет знак, поэтому этим значениям параметра соответствуют точки локального экстремума. А именно: при $t = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс (следовательно, $x(0) = 0$ – точка локального минимума, значение минимума $y(0) = 0$), а при $t = 4/3$ производная меняет знак с плюса на минус, поэтому $x(4/3) = 8/9$ – точка локального максимума (значение максимума в этой точке $y(4/3) = 128/27$). □

Пример 70. *Исследовать на локальные экстремумы и найти наименьшее и наибольшее значения функции, заданной в полярных координатах уравнением* $r = \sin 3\varphi$.

Решение. В силу периодичности функции с периодом $T = 2\pi/3$ достаточно найти локальные экстремумы на отрезке $[0, \frac{2\pi}{3}]$. Область определения функции задается неравенством $r \geqslant 0$. Это означает, что если рассматривать отрезок $[0, \frac{2\pi}{3}]$, то функция определена лишь на его части – отрезке $[0, \frac{\pi}{3}]$.

Найдем производную: $r'_\varphi = 3\cos 3\varphi$ и критические точки. $r' = 0 \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ (из этих точек, где возможен локальный экстремум, на отрезок $[0, \frac{\pi}{3}]$ попадает лишь точка $\varphi = \pi/6$. К критическим точкам следует добавить две точки $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/3$, являющиеся концами данного отрезка и, соответственно, граничными точками области определения. В них существуют лишь односторонние производные, и в этих точках могут достигаться наименьшее и наибольшее значения.

Поскольку в точке $\varphi = \pi/6$ производная равна нулю и меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет локальный максимум, равный 1. Среди значений $r(0) = 0$, $r(\pi/3) = 0$, $r(\pi/6) = 1$ наименьшим, очевидно, будет $r(0) = r(\pi/3) = 0$, а наибольшим – $r(\pi/6) = 1$. □

В некоторых случаях для нахождения наименьшего (наибольшего) значений функции удобнее прибегнуть к оценкам, полученным с помощью неравенств.

Пример 71. *Найти наибольшее значение функции* $y = (1-x)^5(1+2x)^2(1+x)$ *на отрезке* $\left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$.

Решение. На данном отрезке числа $1-x$, $1+2x$, $1+x$ неотрицательны. Воспользуемся неравенством Коши для 8 чисел:

$$(1-x)^5(1+2x)^2(1+x) \leqslant \left(\frac{5(1-x) + 2(1+2x) + (1+x)}{8}\right)^8 = 1,$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда все числа равны, т.е. $1 - x = 1 + 2x = 1 + x \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, $\max\limits_{x\in[-\frac{1}{2},1]} y(x) = y(0) = 1$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.67. Может ли функция убывать в левой полуокрестности и возрастать в правой полуокрестности точки локального максимума? Ответ обосновать.

1.68. Исследовать на экстремум по знаку второй производной (второе достаточное условие экстремума – *Теорема 7.3*) функцию $y = x^2 2^x$.

1.69. Исследовать на экстремум в точке $x = 0$, используя третье достаточное условие экстремума (*Теорема 7.4*), функцию $f(x) = e^x + e^{-x} + \cos x$.

1.70. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = C \cdot f^2(x)$ $(C > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

1.71. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2\cos x + \sin 2x$ на отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$.

1.72. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

1.73. Не используя производной, найти наименьшее значение функции:

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + 1}.$$

При каких значениях x оно достигается?

Исследование функций на периодичность:

Функция $f(x)$, определенная на множестве $X \in \mathbb{R}$, называется *периодической*, если существует действительное число $T \neq 0$ (называемое периодом) такое, что $\forall x \in X$ числа $x-T, x, x+T$ также принадлежат X и при этом выполняется равенство $f(x+T)=f(x)$ (условие периодичности). Наименьший положительный период называется *основным* (главным) *периодом* функции.

Пример 72. *Существуют ли значения параметра а, при которых функция является периодической? Найти главный период.*

а) $y=(a+3)x+5a$, *б)* $y=\dfrac{x^2-a}{x^2-a}$, *в)* $y=(a^2-2a)\sqrt{x^2-a}$.

Решение. а) По определению периодической функции, при всех $x \in \mathbb{R}$ должно выполняться условие периодичности:

$$y(x+T)\equiv y(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+3)(x+T)+5a \equiv (a+3)x+5a \Leftrightarrow (a+3)T \equiv 0.$$

Так как $T \neq 0$, то получаем, что функция является периодической при $a=-3$. При этом в качестве периода может выступать любое $T \neq 0$, поэтому главного периода не существует.

б) $a<0:\ \ y \equiv 1$, следовательно, функция периодична;

при $a \geqslant 0$ функция не определена в одной $(x=0)$ или в двух $(x=\pm\sqrt{a})$ точках, поэтому она не может быть периодической. (Если периодическая функция определена в некоторой точке x_0, то она определена во всех точках вида x_0+Tn, $n \in \mathbb{Z}$. Аналогично, если периодическая функция не определена в точке x_0, то она не определена во всех точках вида x_0+Tn).

в) $a=0:\ y\equiv 0\ (x \in \mathbb{R})$, значит, функция – периодическая; $a=2: y=0\cdot\sqrt{x^2-2}$ – функция определена при $|x| \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow$ не периодична. В самом деле, если предположить, что функция периодична и существует период $T>0$, то, взяв точку $x=0$, где функция не определена, и отложив от нее несколько периодов вправо, мы обязательно попадем в область $x \geqslant \sqrt{2}$, где она уже определена. То есть нарушается условие $\forall x \in X$ числа $x-T, x, x+T$ одновременно принадлежат X.

При $a<0$ функция является четной и монотонно возрастает при $x \geqslant \sqrt{2}$, что не позволяет ей быть периодической. □

Пример 73. *Существуют ли периодические функции, не равные тождественно константе, у которых нет минимального положительного периода?*

Решение. Да, например, функция Дирихле

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \in \mathbb{Q};\\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.\end{cases}$$

Покажем, что любое рациональное число p является периодом этой функции. Действительно, если $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x+p \in \mathbb{Q}$ и равенство $D(x+p)=D(x)$ выполняется. Если же $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, то $x+p \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ – и равенство $D(x+p)=D(x)$ также верно. Но, как известно, наименьшее положительное рациональное число не существует (это легко доказать от противного). □

Пример 74. *Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция периодическая с тем же периодом.*

Доказательство. Пусть $f(x)=f(x+T)$ при всех $x \in D(f)$. Продифференцировав это равенство, получим $f'(x)=f'(x+T)$, что означает, что $f'(x)$ – периодическая функция с тем же периодом T.

Замечание. Если функция $f(x)$ дифференцируема, а ее производная $f'(x)$ не является периодической, то $f(x)$ – непериодическая функция. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.74. Доказать, что если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то сложная функция $y=g(f(x))$ также периодическая с периодом T (при условии, что $D(y) \neq \varnothing$).

1.75. Доказать, что если функция $f(x)$ – периодическая с периодом $T>0$, то функция $g(x)=A\cdot f(Bx+C)+D$, где A, B, C, D – отличные от нуля коэффициенты, также периодична, причем с периодом, равным $T/|B|$.

1.76. Показать, что функция периодическая и найти ее период:

а) $y = \dfrac{3\cos^2 x - 4\cos x + 2}{2\cos^2 x - 3\cos x}$; б) $y = \dfrac{1}{\{5x\}}$.

1.77. Всегда ли сумма (произведение) периодических функций является периодической функцией? Являются ли указанные функции периодическими? Если да, то найти период:

а) $y = 2\sin\left(\dfrac{3}{2}x - 1\right) + \operatorname{ctg}\left(\dfrac{5}{3}x\right) - \cos(2x+2) + 3\operatorname{tg}\left(\dfrac{4}{3}x - 2\right)$;

б) $y = 2\cos\pi x + 4\operatorname{tg}(x+3)$; в) $y = \cos x \cdot \cos(\sqrt{2}x)$.

Исследование функций на наличие у их графиков осей и центров симметрии и, в частности, на четность (нечетность):

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$ (т.е. для любого $x \in X$ число $-x$ также принадлежит X), называется *четной*, если $\forall x \in X$ $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $\forall x \in X$ $f(-x) = -f(x)$. График любой четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции центрально симметричен относительно точки начала координат. Существуют функции (общего вида), которые не являются ни четными, ни нечетными.

Пример 75. *Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ – четные функции, заданные на одном и том же множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ тоже четны на множестве X.*

Доказательство. Пусть $h(x) = f(x) + g(x)$, $p(x) = f(x) \cdot g(x)$, $q(x) = f(x)/g(x)$, тогда при всех $x \in X$

$$h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = h(x),$$

$$p(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = p(x),$$

$$q(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = q(x),$$

что, по определению, означает четность этих функций. □

Пример 76. *Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ – нечетные функции, заданные на множестве X, то функции $f(x) \pm g(x)$ – нечетны на X, а $f(x) \cdot g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ – четные функции.*

Доказательство проводится аналогично предыдущему примеру. □

Пример 77. *Доказать, что любую функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X, симметричном относительно точки $x = 0$, можно представить в виде суммы $\varphi(x) + \psi(x)$ двух функций, каждая из которых определена на том же множестве X, причем $\varphi(x)$ – четна, а $\psi(x)$ – нечетна.*

Доказательство. Рассмотрим очевидное тождество:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad x \in X.$$

Осталось заметить, что $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ – четная функция, а $\psi(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ – нечетная функция. □

Пример 78. *Если можно, то представить функцию $f(x) = \dfrac{3^x + x^2}{\sin x}$ в виде суммы четной и нечетной функций в области, где она определена.*

Решение. Область определения $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$ симметрична относительно $x = 0$, поэтому такое представление возможно. Найдем его:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{3^x + x^2}{\sin x} + \frac{3^{-x} + (-x)^2}{\sin(-x)}}{2} + \frac{\frac{3^x + x^2}{\sin x} - \frac{3^{-x} + (-x)^2}{\sin(-x)}}{2} =$$

$$= \frac{3^x - 3^{-x}}{2\sin x} + \frac{3^x + 3^{-x} + 2x^2}{2\sin x} = \varphi(x) + \psi(x). \ \square$$

Пример 79. *При $x > 2$ задана функция $f(x) = \sqrt[3]{x+6} - 2x$. Какой формулой следует доопределить функцию $f(x)$ при*

$x < 2$, если известно, что график $f(x)$ центрально симметричен относительно точки $M(2,-1)$?

Решение. График функции $y = f(x)$ имеет точку $S(a,b)$ центром симметрии, если $f(a+x) - b = b - f(a-x)$ при всех $x > 0$ таких, что точки $a \pm x \in D(f)$ (сделайте иллюстрацию).

В данном случае имеем: $f(2+x) - (-1) = (-1) - f(2-x)$, откуда $f(2-x) = -2 - f(2+x)$. Пусть $t = 2 - x$, тогда при $x > 0$ имеем $t < 2$ и

$$f(t) = -2 - f(4-t) = -2 - (\sqrt[3]{(4-t)} + 6 - 2(4-t)) = \sqrt[3]{t-10} + 6 - 2t.$$

Итак, функцию надо доопределить в область $x < 2$ следующим образом: $f(x) = \sqrt[3]{x-10} + 6 - 2x$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.78. Доказать, что если $f(x)$ – четна, а $g(x)$ – нечетна, причем обе функции заданы на одном множестве X и не равны тождественно нулю, то $f(x) + g(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

1.79. Доказать, что если $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – четны, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – четна. Если $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ – нечетны, то сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – нечетна.

1.80. Доказать, что если $y = f(x)$ – четна, а $x = \varphi(t)$ – нечетна, то $y = f(\varphi(t))$ – четна.

1.81. Доказать, что если $y = f(x)$ – четна, а $x = \varphi(t)$ – нечетна, то $y = f(x) \cdot g(x)$ – нечетна ($f(x)$ не равна тождественно нулю).

1.82. Является ли четной или нечетной функция:

а) $y = |x-2| - 3|x| + |x+2|$; б) $y = \log_2(x + \sqrt{1+x^2})$;

в) $y = \arccos(\cos x)$; г) $y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{если } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$

1.83. Найти все значения a, при которых функция $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} + at$, $t \neq 0$, является четной.

1.84. Доказать, что график функции

$$y = 4x + \log_2 \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4}$$

имеет центр симметрии, и найти координаты (x, y) этого центра симметрии.

Исследование функций на наличие асимптот:

Пример 80. *Исследовать функцию $y = x + e^{-x}$ на наличие асимптот.*

Решение. Так как для данной функции не существует такого конечного x_0, что $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} y(x) = \infty$, то вертикальных асимптот у графика функции нет. Поскольку не существует конечного предела функции при $x \to \pm\infty$, то горизонтальных асимптот также нет. В силу бесконечности предела отношения $\dfrac{y(x)}{x}$ при $x \to -\infty$, там отсутствует наклонная асимптота. Поищем наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ в виде $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + e^{-x}}{x} = 1.$$

Так как нашелся конечный угловой коэффициент, то асимптота, возможно, есть. Проверим, существует ли конечный свободный член:

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} ((x + e^{-x}) - x) = 0.$$

Итак, график имеет единственную наклонную асимптоту $y = x$. □

Пример 81. *Найти асимптоты графика функции*

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Во-первых, у графика имеется вертикальная асимптота $x = 0$, так как $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = -\infty$. Во-вторых, поскольку $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$, то имеется горизонтальная асимптота $y \equiv 0$ при $x \to +\infty$. □

Пример 82. *Найти асимптоты графика функции, заданной параметрически*

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Решение. Вертикальных асимптот у графика функции нет, так как в этом случае при $x \to x_0$ ($\neq \pm\infty$) должно $y \to \pm\infty$. Но таких t_0, чтобы оба эти условия выполнялись, в данном случае нет.

Горизонтальных асимптот также нет, поскольку в этом случае должно существовать t_0 такое, чтобы при $t \to t_0$ выполнялись условия: $x \to \pm\infty$, а $y \to \text{const}$. Очевидно, что таких t_0 не существует.

Наклонных асимптот график тоже не имеет, так как $x(t)$ и $y(t)$ в этом случае одновременно должны стремиться к ∞, причем предел $\lim\limits_{t \to t_0 \pm 0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ должен быть конечным, а в данном случае при $t \to \pm\infty$ этот предел бесконечен.

Итак, у графика функции нет асимптот. □

Пример 83. *Найти асимптоты графика функции, заданной неявно:*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0).$$

Решение. Параметризуем данную кривую, называемую *декартов лист*, положив $y = tx$:

$$x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2\left(x\left(1 + t^3\right) - 3at\right) = 0.$$

Отсюда видим, что точка $x = 0$, $y = 0$ лежит на кривой, кроме того, получаем параметрическое представление, более удобное для нахождения асимптот:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Найдем асимптоты. Они могут быть только там, где хотя бы одна из переменных x или y стремится к бесконечности. Но

в данной задаче это происходит только при $t \to -1 \pm 0$:

$$\lim_{t \to -1 \pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1 \pm 0} \frac{\frac{3at^2}{1+t^3}}{\frac{3at}{1+t^3}} = \lim_{t \to -1 \pm 0} \frac{3at^2}{3at} = -1.$$

Поскольку угловой коэффициент асимптоты оказался конечен, то теперь найдем ее свободный член:

$$b = \lim_{t \to -1 \pm 0} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t \to -1 \pm 0} \left(\frac{3at^2}{1 + t^3} - \frac{3at}{1 + t^3}\right) =$$

$$= \lim_{t \to -1 \pm 0} \frac{3at(1 + t)}{1 + t^3} = \lim_{t \to -1 \pm 0} \frac{3at}{t^2 - t + 1} = -a.$$

То есть $y = -x - a$ – наклонная асимптота (одна и та же при $t \to -1 - 0$ и при $t \to -1 + 0$). □

Пример 84. *Найти асимптоты графика функции, заданной в полярных координатах:*

$$r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \quad (a > 0).$$

Решение. В силу периодичности функции с периодом $\frac{2\pi}{3}$, будем искать асимптоты на промежутке $[0, \frac{2\pi}{3}]$. Очевидно, имеются аналоги вертикальных асимптот, которые можно найти, приравняв знаменатель дроби к нулю:

$$\cos 3\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \; n \in \mathbb{Z}.$$

В указанный промежуток (на границе области определения функции) попадают две асимптоты: $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. □

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ.

1.85. Найти асимптоты графика функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t + e^{-t}, \\ y = 2t + e^{-2t}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.86. Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \begin{cases} |x|(2 + \cos\frac{1}{x}), & \text{если } x \neq 0; \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

§2. Задачи к главе 2

1. *Исследовать поведение и построить эскиз кривой, если она задана следующим образом:*

$$\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

РЕШЕНИЕ. Заметим, что функция $x(t) = 2t - t^2$ имеет область значений $x \in (-\infty; 1]$. Поэтому вся кривая располагается в полуплоскости $\Pi : x \leqslant 1$. При этом область значений $y(t)$ охватывает всю вещественную ось.

Найдем точки пересечения кривой с осями координат. $x(0) = y(0) = 0$, $x(2) = 0, y(2) = -2$, $y(\pm\sqrt{3}) = 0$, $x(\pm\sqrt{3}) = \pm 2\sqrt{3} - 3$. Это означает, что исследуемая кривая проходит через точки с координатами $(0;0)$, $(0;-2)$, $(-2\sqrt{3}-3; 0)$, $(2\sqrt{3}-3, 0)$ при $t = 0, 2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$ соответственно.

Отметим, что из равенства $x = 2t - t^2$ для t получаются два выражения: $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$. Поэтому получается 2 выражения y через x. Это означает, что исследуемая кривая имеет 2 ветви, которые примыкают друг к другу в точке графика $(1;2)$, при $t = 1$. Первая из них соответствует интервалу $t \in (-\infty; 1]$, вторая - интервалу $t \in [1; +\infty)$. Каждая из этих ветвей представляет собой график функции, заданной параметрически, на соответствующем интервале изменения параметра t. Исследуем каждую ветвь.

Найдем производные функций $x(t), y(t)$.

$$\dot{x}(t) = 2 - 2t, \dot{y}(t) = 3 - 3t^2.$$

Вычислим также первую и вторую производные y по переменной x:

$$y'_x(t) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1 + t)$$

$$y''_{xx}(t) = \frac{(y'_x(t))'_t}{x'(t)} = \frac{3}{4(1-t)}$$

Замечаем, что $y'_x(-1) = 0, y''_{xx}(-1) = \frac{3}{8}$. Следовательно, на первой ветви исследуемой кривой имеется локальный минимум

в точке кривой с координатами $(-3;-2)$, при $t = -1$. В точке стыка двух ветвей кривой, при $t = 1$, определена их общая касательная, тангенс угла наклона которой равен $y'_x(1) = 3$. Знак второй производной $y''_{xx}(t)$, как известно, говорит о направлении выпуклости. Имеем: $y''_{xx}(t) > 0$ при $t < 1$, $y''_{xx}(t) < 0$ при $t > 1$, и $y''_{xx}(t)$ не определена при $t = 1$. Отсюда делаем вывод, что исследуемая кривая имеет направление выпуклости вниз при $t < 1$ и вверх - при $t > 1$. Таким образом, в точке графика $(1;2)$ кривая, переходя с первой ветви на вторую, меняет направление выпуклости.

Для более точного построения кривой найдем $y'_x(t)$, то есть направления касательных, в точках пересечения кривой с осями координат:

$$y'_x(-\sqrt{3}) = \frac{3}{2} \cdot (1 - \sqrt{3}) \approx -1.1, \quad y'_x(0) = \frac{3}{2} = 1.5,$$

$$y'_x(\sqrt{3}) = \frac{3}{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \approx 4.1, \quad y'_x(2) = \frac{9}{2} = 4.5.$$

Теперь несложно по вычисленным данным изобразить эскиз данной кривой. Приводим его ниже на Рис.7

2. ***Исследовать поведение и построить эскиз кривой, заданной в полярных координатах.***

$$K : r = r(\varphi) = 1 + cos\varphi, \varphi \in [0; 2\pi].$$

РЕШЕНИЕ. Прежде всего заметим, что так как функция cos четная и периодическая с периодом 2π, то достаточно построить искомую кривую на промежутке $\varphi \in [0; \pi]$.

Полезно также отметить, что $\dot{r}(\varphi) = -sin\varphi = 0$ при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \pi$. Более того, $\ddot{r}(\varphi) = -cos\varphi$, и $\ddot{r}(0) = -1, \ddot{r}(\pi) = 1$. Следовательно, наибольшее значение функции $r(\varphi)$ на промежутке $[0; \pi]$ равно $r_{\text{наиб.}} = r(0) = 2$. Аналогично, наименьшее значение этой функции на том же промежутке равно $r_{\text{наим.}} = r(\pi) = 0$. Значит, вся кривая целиком содержится в круге радиуса 2 с центром в начале декартовой системы координат, связанной с полярной системой формулами:

$$x = r \cdot \cos\varphi, y = r \cdot \sin\varphi. \qquad (*)$$

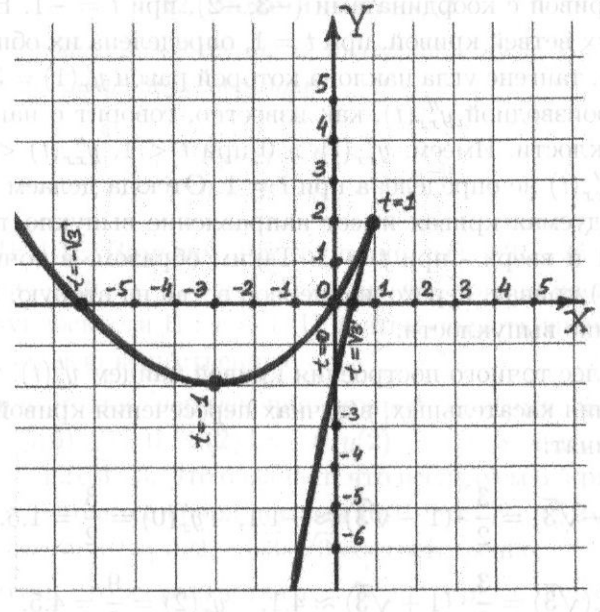


Рис. 7:

Подставив в формулы $(*)$ выражение для функции $r(\varphi)$, получим параметрическое задание данной кривой в декартовой системе координат:

$$\begin{cases} x = x(\varphi) = (1+\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y = y(\varphi) = (1+\cos\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Найдем производные

$$\dot{x}(\varphi) = -\sin\varphi(1+2\cos\varphi);\ \dot{y}(\varphi) = \cos\varphi + \cos 2\varphi.$$

Отсюда получаем первую и вторую производные y по переменной x:

$$y'_x(\varphi) = \frac{\cos\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}(1+2\cos\varphi)}, y''_{xx}(\varphi) = \frac{3(1+\cos\varphi)}{\sin^3\varphi(1+2\cos\varphi)^3}$$

Исследуя точки, где $y'_x(\varphi)$ и $y''_{xx}(\varphi)$ обращаются в нуль и меняют знак, заключаем, что $y'_x(\frac{\pi}{3}) = 0$, а в точках $\varphi = 0, \varphi = \frac{2\pi}{3}$

величина $y'_x(\varphi)$ уходит в бесконечность. Кроме того, $y''_{xx}(\varphi)$ отрицательна на интервале $\varphi \in (0; \frac{2\pi}{3})$ и положительна на интервале $(\frac{2\pi}{3}; \pi)$.

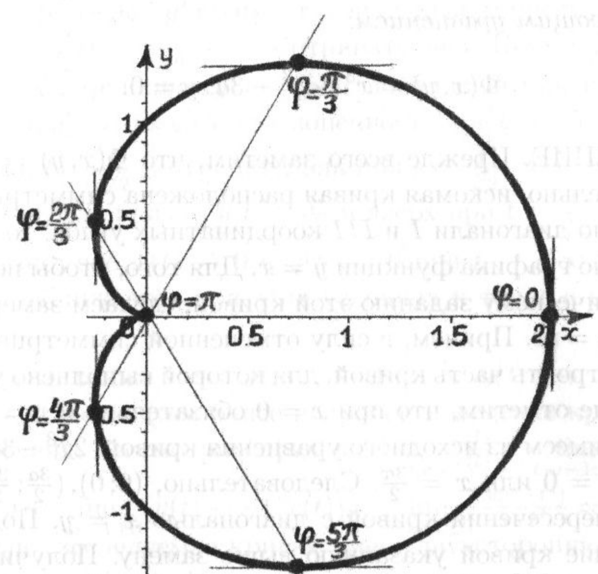


Рис. 8:

Это означает, согласно достаточным условиям существования локальных экстремумов и определения направления выпуклости кривой,что при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ имеется локальный максимум кривой в точке декартовой системы с координатами $(\frac{3}{4}; \frac{3\sqrt{3}}{4})$. Касательная (односторонняя) к исследуемой кривой горизонтальна также в точке $(0;0)$, при $\varphi = \pi$. В точках $(2;0)$ и $(-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4})$, при φ равном 0 и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно, касательные вертикальны.

На основании полученных данных легко построить часть искомой кривой на промежутке $[0; \pi]$. Далее, учитывая чётность и периодичность функции cos, достраиваем остальную часть кривой, расположенную симметрично первой части, в III и IV четвертях декартовой системы координат. Эскиз данной кривой, называемой *кардиоидой*, приведен на Рис.8.

3. *Исследовать поведение и построить эскиз кривой, заданной следующим уравнением:*

$$\Phi(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Прежде всего заметим, что $\Phi(x,y) = \Phi(y,x)$. Следовательно, искомая кривая расположена симметрично относительно диагонали I и III координатных углов, то есть относительно графика функции $y = x$. Для того, чтобы перейти к параметрическому заданию этой кривой, сделаем замену переменной: $y = tx$. Причем, в силу отмеченной симметрии, достаточно построить часть кривой, для которой выполнено условие: $y \geqslant x$. Еще отметим, что при $x = 0$ обязательно и $y = 0$. Если $x = y$, то имеем из исходного уравнения кривой: $2x^3 - 3ax^2 = 0$, то есть $x = 0$ или $x = \frac{3a}{2}$. Следовательно, $(0;0), (\frac{3a}{2};\frac{3a}{2})$ - это 2 точки пересечения кривой с диагональю $x = y$. Подставим в уравнение кривой указанную выше замену. Получим уравнение: $x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0$. Сокращая на x^2 (и полагая x отличным от нуля), получим уравнение: $x + t^3x - 3at = 0$, - из которого находим: $x = \frac{3at}{1+t^3}, y = tx = \frac{3at^2}{1+t^3}$.

Итак, искомая кривая задается параметрически следующим образом.

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \qquad (*)$$

Вычислим производные $\dot{x}(t), \dot{y}(t), y'_x(t), y''_{xx}(t)$. Получим:

$$\dot{x}(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad \dot{y}(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2},$$

$$y'_x(t) = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}, \quad y''_{xx}(t) = \frac{2(1+t^3)^4}{3a(1-2t^3)^3}.$$

Приравнивая соответствующие производные к нулю и пользуясь достаточными условиями монотонности функции, существования локальных экстремумов, а также перегибов графика функции, находим, что $y'_x(t)$ обращается в нуль при $t = 0$ и при $t = \sqrt[3]{2}$. При этом $y''_{xx}(0) = \frac{2}{3a} > 0$, поэтому в точке $x(0) = 0$ функция $y(x)$ имеет локальный минимум. Производная $y''_{xx}(\sqrt[3]{2}) = -\frac{2}{a} < 0$ - отрицательна. Поэтому в точке $x(\sqrt[3]{2}) = a\sqrt[3]{2}$ функция $y(x)$ имеет локальный максимум. Далее, так как $y''_{xx}(t)$ уходит в бесконечность при $t \to \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, положительна при $t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и отрицательна при $t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, то исследуемая кривая выпукла вниз при $t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ и вверх при $t > \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Очевидно, что $x(t) \to 0$ и $y(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Поэтому кривая приближается при этих условиях к точке с координатами (0;0).

Замечаем также, что $x(t) \to \pm\infty$, а $y(t) \to \mp\infty$ при $t \to -1 \mp 0$. Исследуем более подробно поведение кривой при этих условиях. Рассмотрим предел $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to -1\pm 0} t = -1$. Кроме того, $\lim\limits_{t\to -1\pm 0} (y(t) - (-1)x(t)) = \lim\limits_{t\to -1\pm 0} \frac{3a(t+t^2)}{1+t^3} = -a$. Следовательно, исследуемая кривая имеет двухстороннюю асимптоту при $t \to -1 \pm 0$. Уравнение этой асимптоты: $y = -x - a$.

По вычисленным данным несложно построить эскиз заданной кривой. Он прилагается на Рис.9. Заданная кривая носит название "декартов лист".

4. *Однородный тонкий стержень длины $l > 2a$ опустили в чашу, которая имеет форму полушара радиуса a (Рис.10). Требуется найти положение равновесия этого стержня в чаше. Трением пренебречь.*

РЕШЕНИЕ. Ясно, что под действием силы тяжести стержень стремится занять положение (оно и будет положением равновесия), при котором его центр масс опустится как можно ниже. Рассмотрим плоский чертеж (Рис.11), где начало координат совмещено с точкой касания чаши с плоскостью.

Обозначим массу стержня через m, координаты конца стержня M, находящегося в чаше, через $M(x_0, y_0)$, угол между

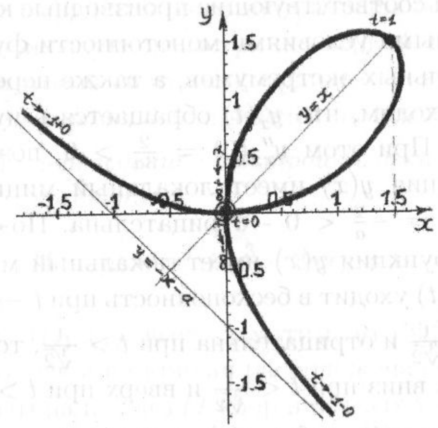


Рис. 9:

стержнем и осью OX - через φ, высоту центра масс стержня C - через h. Используя эти обозначения, можно записать следующие очевидные соотношения: потенциальная энергия стержня $E = mgh$, $h = \dfrac{l}{2}\sin\varphi + y_0$. Из треугольника ΔABM имеем: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{a - y_0}{a + x_0}$, откуда $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{(a-y_0)^2}{(a+x_0)^2}$. Далее, так как точка $M(x_0, y_0)$ лежит на окружности (задаваемой формой чаши) с центром в точке $O(0; a)$, то ее координаты удовлетворяют уравнению этой окружности: $O : x^2 + (y-a)^2 = a^2$, что равносильно равенству $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Используя это равенство, получаем, что $\operatorname{tg}^2\varphi = \dfrac{a^2 - x_0^2}{(a+x_0)^2} = \dfrac{a - x_0}{a + x_0}$, откуда $x_0 = a \cdot \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = a \cdot \dfrac{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi\,(1 + \operatorname{tg}^2\varphi)} = a\cos 2\varphi$.

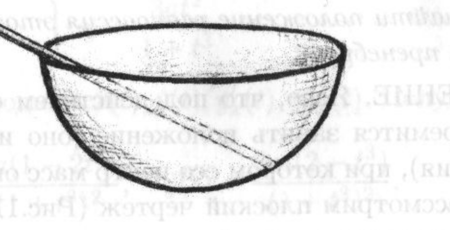


Рис. 10:

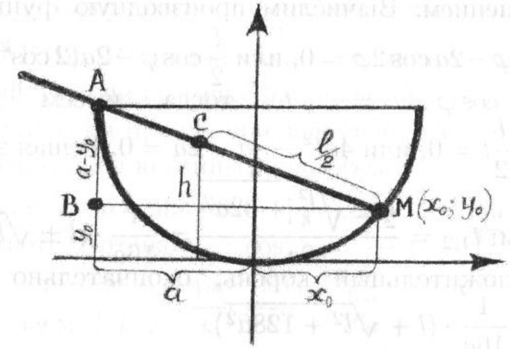


Рис. 11:

Теперь, используя равенство $x_0 = a\cos 2\varphi$, из уравнения окружности можно найти y_0. Получаем: $y_0^2 - 2ay_0 + a^2\cos 2\varphi = 0$, откуда $y_0 = a \pm \sqrt{a^2 - a^2\cos^2 2\varphi} = a \pm a\sin 2\varphi$. Очевидно, что $y_0 < a$, поэтому из двух корней реален только корень $a - a\sin 2\varphi$.

Подставим теперь полученное выражение $y_0 = a - a\sin 2\varphi$ в выражение для h и затем в выражение для потенциальной энергии. Имеем: $E = mgh = mg(\dfrac{l}{2}\sin\varphi + a - a\sin 2\varphi)$. Легко видеть, что минимизация потенциальной энергии центра масс стержня эквивалентна минимизации функции $f(\varphi) = \dfrac{l}{2}\sin\varphi + a - a\sin 2\varphi$, где переменная φ принимает значения на отрезке $[0; \dfrac{\pi}{4}]$ (что соответствует реальным положениям стержня в чаше). Итак, получена математическая формулировка задачи на отыскание наименьшего значения функции одной переменной на заданном интервале. Займемся ее решением. Вычислим производную функции $f(\varphi)$. $f'(\varphi) = \dfrac{l}{2}\cos\varphi - 2a\cos 2\varphi = 0$, или $\dfrac{l}{2}\cos\varphi - 2a(2\cos^2\varphi - 1) = 0$. Обозначим $\cos\varphi = t$, тогда имеем уравнение: $-4at^2 + 2a + \dfrac{l}{2}t = 0$, или $4at^2 - \dfrac{l}{2}t - 2a = 0$. Решая это уравнение, получаем: $t_{1,2} = \dfrac{\frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + 32a^2}}{8a} = \dfrac{1}{16a}\cdot(l \pm \sqrt{l^2 + 128a^2})$. Выбирая положительный корень, окончательно получаем: $t_0 = \cos\varphi_0 = \dfrac{1}{16a}\cdot(l + \sqrt{l^2 + 128a^2})$.

Нетрудно убедиться, что $t_0 \in (\dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1)$, что соответствует принадлежности соответствующего значения φ_0 (для которого $\cos(\varphi_0) = t_0$) промежутку $[0; \dfrac{\pi}{4}]$. Достаточно проверить, что $t_0 > \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$. Это следует из того, что по условию, $l > 2a$. В самом деле, $t_0 = \cos\varphi_0 = \dfrac{1}{16a}\cdot(l + \sqrt{l^2 + 128a^2}) > \frac{1}{16a}\cdot(2a + \sqrt{4a^2 + 128a^2}) = \frac{1+\sqrt{33}}{8} > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Теперь по поведению производной несложно определить, что t_0 - единственная точка локального минимума функции $f(\varphi)$. В самом деле, $f'(t)$ является многочленом, имеющим 2 корня: отрицательный и положительный, причем первый коэффициент этого многочлена отрицательный. Это означает, что его график - парабола, выпуклая вверх. Следовательно, значения $f'(t)$ положительны на интервале от $t_1 = \dfrac{1}{16a}\cdot(l - \sqrt{l^2 + 128a^2})$ до t_0, отрицательны вне этого интервала.

Следовательно, в точке t_0 (значение большего корня) квадратный трехчлен $f'(t)$ меняет знак с плюса на минус при возрастании t. Но так как $t = \cos\varphi$ является убывающей функцией на промежутке $[0; \frac{\pi}{4}]$, то возрастанию t соответствует убывание φ. Значит, при переходе через соответствующую точку φ_0 при возрастании φ, происходит изменение знака $f'(\cos\varphi)$ с минуса на плюс, а это означает, что точка φ_0, соответствующая t_0 (то есть $\cos\varphi_0 = t_0$), является точкой локального (а значит, и

глобального на промежутке $[0; \dfrac{\pi}{4}]$) минимума функции $f(\varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В данной задаче не производилось сравнение значений функции в точке t_0 и на концах отрезка $[0; \frac{\pi}{4}]$, поскольку технически проще определить точку глобального минимума именно предложенным способом.

Итак, наименьшее значение функции $f(t)$ на промежутке $[0; \frac{\pi}{4}]$ достигается в точке $t_0 = \cos\varphi_0 = \frac{1}{16a}\cdot(l + \sqrt{l^2 + 128a^2})$. Так как $\cos\varphi \leqslant 1$, то имеем неравенство: $\frac{1}{16a}\cdot(l + \sqrt{l^2 + 128a^2}) \leqslant 1$, откуда получаем: $l + \sqrt{l^2 + 128a^2} < 16a \Longrightarrow l < 4a$. При этом в положении равновесия координаты конца стержня принимают значения: $x_0 = a\cos 2\varphi_0 = a\cdot(2\cos^2\varphi_0 - 1) = a(t_0^2 - 1)$, $y_0 = a(1 - \cos^2\varphi_0) = a(1 - t_0^2)$.

ОТВЕТ: $x_0 = a(t_0^2 - 1), y_0 = a(1 - t_0^2)$, где $t_0 = \frac{1}{16a}\cdot(l + \sqrt{l^2 + 128a^2})$. При этом все возможные варианты значений l удовлетворяют неравенству: $2a < l \leqslant 4a$.

5. *Найти высоту прямого цилиндра с наибольшим объемом, который может быть вписан в шар радиуса R.*

РЕШЕНИЕ. Рассмотрим чертеж сечения шара с вписанным цилиндром (Рис.12). Обозначим через r радиус цилиндра, а че-

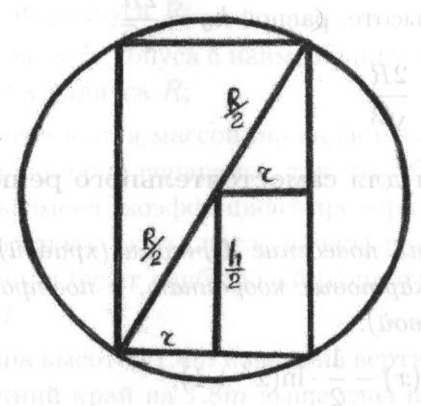


Рис. 12:

рез h - его высоту. Легко видеть, что согласно условию вписанности цилиндра в шар, $r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$, откуда $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$. Следовательно, объем цилиндра выражается через h по формуле: $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h$. Отсюда с очевидностью следует математическая постановка задачи:

Найти значение h_0, *при котором функция* $f(h) = (4R^2 - h^2)h = 4hR^2 - h^3$ *принимает свое наибольшее значение на промежутке* $[0; 2R]$. Приступим к ее решению.

$$f'(h) = 4R^2 - 3h^2 = 0 \Longrightarrow h^2 = \frac{4R^2}{3}.$$

Следовательно, $h_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}} \in (0; 2R)$ - единственная критическая точка функции $f(h)$ на указанном промежутке.

Сравним значения функции $f(h)$ в точках $0, h_0, 2R$.

$$f(0) = f(2R) = 0, f(h_0) = 4 \cdot \frac{2R}{\sqrt{3}} R^2 - (\frac{2R}{\sqrt{3}})^3 = \frac{16R^3}{3\sqrt{3}} > 0.$$

Итак, наибольший объем вписанного в шар цилиндра достигается при его высоте, равной $h_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

ОТВЕТ: $h_0 = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Задачи для самостоятельного решения.

I. *Исследовать поведение функции (кривой), заданной соотношением декартовых координат, и построить ее график (эскиз этой кривой):*

I.1. $y = arctg(x) - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1)$;

I.2. $y = (x+1)^4 \cdot e^x$;

I.3. $y = \sqrt{x} \cdot \ln x$ при $x > 0$, $y(0) = 1$;

I.4. $y = \frac{x^3}{x^2+3}$;

I.5. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

II. *Исследовать поведение и построить эскиз кривой или графика функции, заданных параметрически:*

II.1. $x = t + e^{-t}, y = 2t + e^{-2t}$;

II.2. $x = a\cos 2t, y = a\cos 3t, (a > 0)$;

II.3. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t$;

II.4. $x = t\ln t, y = \frac{\ln t}{t}$;

II.5. $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

III. *Исследовать поведение и построить эскиз кривой или графика функции, заданных в полярных координатах:*

III.1. $r = a\sin 3\varphi$;

III.2. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$;

III.3. $r = a \cdot \frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1, a > o$;

III.4. $\varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}$;

IV. *Решить задачи на максимум (минимум):*

IV.1. Из всех круговых секторов с данным периметром $2P$ найти тот, у которого наибольшая площадь.

IV.2. Найти наибольшую полную поверхность цилиндра, вписанного в шар радиуса R;

IV.3. Найти высоту конуса с наименьшим объемом, описанного вокруг шара радиуса R;

IV.4. Дождевая капля массой m_0 падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь, так что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей (сопротивлением воздуха пренебречь)?

IV.5. Картина высотой $1.4m$ повешена вертикально на стену так, что ее нижний край на $1.8m$ выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы видеть картину под наибольшим углом?

IV.6. Сосуд с вертикальной стенкой высоты h заполнен жидкостью до края. Из отверстия в стенке бьет струя. Определить положение отверстия, при котором дальность струи в начальный момент будет максимальной (скорость струи равна $\sqrt{2gx}$, где x - глубина отверстия, то есть расстояние отверстия от верхнего края сосуда, g - ускорение свободного падения).

IV.7. Канал поворачивает под прямым углом. Ширина участков канала до и после поворота равна соответственно a и b.По этому каналу производится сплав леса (бревен). Найти максимальную длину бревна, которое может пройти по каналу (толщиной бревна пренебречь).

§3. Ответы и решения.

К главе 1

1.1. $y' = 5\sin^4(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)$, $x \in \mathbb{R}$;

1.2. $y' = 10^{\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{x^2-8}} \cdot \ln 10 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{x^2-8}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-8)-2x(2x-1)}{(x^2-8)^2}$, $x \neq \pm\sqrt{8}$.

1.3. $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x\ln x \ln(\ln^3 x)}$, $x > 1, x \neq e$;

1.4. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^4 x}} \cdot 2\cos x \cdot (-\sin x) =$

$$= \frac{2\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1+\cos^2 x}} = \frac{2\sin x\cos x}{|\sin x|\sqrt{1+\cos^2 x}} =$$

$\frac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$, $x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.5. $y' = \left(\arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\right) \cdot$ $\operatorname{sh} x = \frac{|\operatorname{ch} x|}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} \cdot \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}$. Так как $\operatorname{ch} x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{ch}^2 x - 1 = \operatorname{sh}^2 x$, то окончательно имеем $y' = \frac{\operatorname{sh} x}{|\operatorname{sh} x|} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$, $x \neq 0$.

1.6. При $x \neq -\frac{1}{3}; 0$ имеем $y' = \frac{1}{3}\left(x + \sqrt[3]{x + \sqrt[3]{x+3x^2}}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{3}\left(x + \sqrt[3]{x+3x^2}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}(x+3x^2)^{-\frac{2}{3}}(1+6x)\right)\right).$$

1.7. $y = x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}$, тогда $y' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\ln x\right)' = x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$, $x > 0$.

1.8. Переходя к основанию e, имеем: $\left(x^{x^a}\right)' = \left(e^{x^a \ln x}\right)' = x^{x^a}(x^a \ln x)' = x^{x^a}\left(ax^{a-1}\ln x + x^a \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{a-1}x^{x^a}(a\ln x + 1)$;

$(x^{a^x})' = (e^{a^x\ln x})' = x^{a^x}\left(a^x\ln a\ln x + a^x\cdot\frac{1}{x}\right) = a^x x^{a^x}\left(\ln a\ln x+\frac{1}{x}\right)$; $(a^{x^x})' = a^{x^x}\ln a\cdot(x^x)' = x^x a^{x^x}\ln a(1+\ln x)$.

1.9. $y' = (e^{\cos x\ln\sin x})' = (\sin x)^{\cos x}(\cos x\ln\sin x)' = (\sin x)^{\cos x}\left(-\sin x\ln\sin x+\cos x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right) = (\sin x)^{\cos x+1}\cdot(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x)$, $\sin x>0$.

1.10. $y' = \left(x^{\sqrt{x}^x}\right)' = \left(e^{\sqrt{x}^x\ln x}\right)' = e^{\sqrt{x}^x\ln x}\cdot(\sqrt{x}^x\ln x)' = x^{\sqrt{x}^x}\left((\sqrt{x}^x)'\ln x+\sqrt{x}^x(\ln x)'\right)$.

Найдем $(\sqrt{x}^x)' = \left(e^{x\ln\sqrt{x}}\right)' = e^{x\ln\sqrt{x}}(x\ln\sqrt{x})' = \sqrt{x}^x\left(\ln\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^x\left(\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)$.

Тогда $y' = x^{\sqrt{x}^x}\left(\sqrt{x}^x\left(\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\ln x + \sqrt{x}^x\frac{1}{x}\right) = x^{\sqrt{x}^x}\cdot\sqrt{x}^x\left(\left(\ln\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\ln x+\frac{1}{x}\right)$, $x>0$.

1.11. Поскольку $(uvw)' = u'vw+uv'w+uvw'$, то $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3 + (1-x)2(1-x^2)(-2x)(1-x^3)^3 +$
$+(1-x)(1-x^2)^2 3(1-x^3)^2(-3x^2) =$
$-(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x+15x^2+14x^3)$, $x\in\mathbb{R}$.

1.12. $y' = \left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot\ln\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^a\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^b + \left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot b^a(-a)x^{-a-1}\cdot\left(\frac{x}{a}\right)^b + \left(\frac{a}{b}\right)^x\cdot\left(\frac{b}{x}\right)^a\cdot a^{-b}bx^{b-1} = y\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{a-b}{x}\right)$, $x>0$.

1.13. $\left(\frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2 x}\right)' = (\mathrm{th}\,2x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 2x}\cdot(2x)' = \frac{2}{\mathrm{ch}^2 2x}$.

1.14. $(4\,\mathrm{sh}^3 x+3\,\mathrm{sh}\,x)' = (\mathrm{sh}\,3x)' = 3\,\mathrm{ch}\,3x$.

1.15. $y=\frac{\pi}{2}x \Rightarrow y'=\frac{\pi}{2}$, $x\in(-1,1)$.

1.16. Перейдем во всех логарифмах к основанию e:
$$y=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\cdot\frac{\ln(x+2)}{\ln(x+1)}\cdot\frac{\ln(x+3)}{\ln(x+2)}\cdot\ldots\cdot\frac{\ln(x+2015)}{\ln(x+2014)}.$$

После упрощения получим $y=\frac{\ln(x+2015)}{\ln x}$, далее продифференцируйте самостоятельно.

1.17. Заметим, что под корнем стоит полный квадрат: $y=\sqrt{(1+x^2+\sin x)^2} = |1+x^2+\sin x| = 1+x^2+\sin x$, тогда $y'=2x+\cos x$.

1.18. $y' = \frac{(ax+b)'(cx+d)-(ax+b)(cx+d)'}{(cx+d)^2} = \frac{a(cx+d)-c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, $cx+d\neq 0$.

1.19. Пусть $u=\frac{1}{\sqrt{x}}$, тогда $(\ln(u+\ln(u+\ln u)))'_u = \frac{1}{u+\ln(u+\ln u)}\cdot\left(1+\frac{1}{u+\ln u}\cdot\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)$. Поскольку $u'_x = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$, то при $x>0$ имеем: $y'_x=y'_u\cdot u'_x = \left(-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right)\cdot$
$$\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)\right).$$

1.20. Пусть $u=\cos^2 x$, тогда $y=\ln(u+\sqrt{1+u^2})$. Продифференцируем y по u:
$$y'_u=\frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}\cdot\left(1+\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}.$$
Продифференцируем u по x: $u'_x=2\cos x(-\sin x)=-\sin 2x$. Тогда $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot(-\sin 2x) = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

1.21. Введем промежуточную переменную $u=\sqrt[4]{1+x^4}$, тогда $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}u+\frac{1}{4}\ln\frac{u+1}{u-1}$ и, соответственно,
$$y'_u = \frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{u-1}{u+1}\cdot\frac{(u+1)'(u-1)-(u+1)(u-1)'}{(u-1)^2} =$$
$$\frac{1}{2(1+u^2)}+\frac{1}{4}\cdot\frac{u-1}{u+1}\cdot\frac{-2}{(u-1)^2} = \frac{1}{2(1+u^2)}-\frac{1}{2(u^2-1)} = \frac{1}{1-u^4},$$
$u'_x=\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$. Тогда $y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{1-u^4}\cdot\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}=$

$$\frac{1}{-x}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} = -\frac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}},\ x \neq 0.$$

1.22. Если $x \neq \pm\pi$, то модуль раскрывается и функция дифференцируется обычным образом. Исследуем функцию на дифференцируемость в точках $x = \pm\pi$:

$$f'(\pi) = \lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi}\frac{|\pi^2-x^2|\sin^2 x}{x-\pi}.$$

Сделав замену $t = x - \pi$, получим:

$$\lim_{t\to 0}\frac{|t||2\pi+t|\sin^2 t}{t} = \lim_{t\to 0}\left(|t||2\pi+t|\sin t\cdot\frac{\sin t}{t}\right) = 0.$$

Аналогично, $f'(-\pi) = 0$. Итак, функция дифференцируема во всех точках.

1.23. Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке $x = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f'_-(0) = f'_+(0)$. Найдем односторонние производные:

$$f'_-(0) = \lim_{x\to -0}\frac{\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} - 0}{x-0} = \lim_{x\to -0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -0}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2};\quad f'_+(0) = \lim_{x\to +0}\frac{ax-0}{x-0} = a.$$

Следовательно, функция дифференцируема только при $a = \frac{1}{2}$.

1.24. Очевидно, что во всех точках, кроме $x = 1$, функция дифференцируема. Выясним, будет ли она дифференцируемой в точке $x = 1$. Известно, что функция дифференцируема в точке $x = 1$ тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и ее односторонние производные равны.

1) Условие непрерывности:

$$f(1-0) = f(1+0) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1-0}(a+bx^2) = \lim_{x\to 1+0} x^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a + b = 1.$$

2) Условие дифференцируемости: $f'_-(1) = f'_+(1)$, где

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0}\frac{(a+bx^2)-(a+b)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1-0} b(x+1) = 2b;$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{x^x-1}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\left(\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}\cdot\frac{x\ln x}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1+0}\frac{x\ln x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1+0}\frac{x\ln(1+(x-1))}{x-1} = \lim_{x\to 1+0}\frac{x(x-1)}{x-1} = 1.$$

Решая систему $a + b = 1$, $2b = 1$, находим $a = b = \frac{1}{2}$.

1.25. Найдем область определения функции: $\log_2(\sin x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$, т.е. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку функция определена в отдельных точках, то она не дифференцируема.

1.26. Известно, что арккосинус определен при условии $-1 \leq \operatorname{ch}(x^2) \leq 1$, но в то же время $\operatorname{ch}(x^2) \geq 1$. Отсюда получаем область определения функции: $\operatorname{ch}(x^2) = 1$, т.е. $x^2 = 0$. Функция нигде не дифференцируема, так как определена в единственной точке $x = 0$.

1.27. Аргумент функции строго больше единицы, поскольку первое слагаемое неотрицательно, а второе $2^{x^2+1} \geq 2$. Функция нигде не определена и, следовательно, не может быть дифференцируемой.

1.28. Вообще говоря, нет. Рассмотреть пример $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

1.29. Выразим y из этого равенства: $xy = \sin^3(\log_5 x) \Rightarrow y = \frac{1}{x}\sin^3(\log_5 x)$ $(x > 0)$ и, продифференцировав, получим

$$y' = -\frac{1}{x^2}\sin^3(\log_5 x) + \frac{1}{x}\cdot 3\sin^2(\log_5 x)\cdot\cos(\log_5 x)\cdot\frac{1}{x\cdot\ln 5}.$$

1.30. Найдем явный вид $g(x)$. Подставим в $f(x)$ вместо x выражение $2-3g(x)$: $f(2-3g(x)) = 5-2(2-3g(x)) = 1+6g(x)$. По условию, $1+6g(x) = 13-24x$, откуда находим $g(x) = 2-4x$, тогда $g'(x) = -4$.

1.31. Продифференцируем равенство по x:

$$2x+2(y+xy')-2yy'=2 \;\Rightarrow\; y'=\frac{x+y-1}{y-x} \quad (x\neq y).$$

При $x=2$ и $y=4$ имеем: $y'=\dfrac{5}{2}$.

1.32. Решение. Возьмем дифференциал от обеих частей равенства: $d(y+\ln y+x^3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad dy+\dfrac{dy}{y}+3x^2dx=0.$ $(*)$

Отсюда $dy=-\dfrac{3x^2y}{y+1}dx$. Для нахождения второго дифференциала возьмем дифференциал от обеих частей равенства $(*)$:

$$d^2y+\frac{yd^2y-dy^2}{y^2}+6xdx^2=0.$$

Умножим полученное равенство на y^2 и выразим из него d^2y:

$$d^2y=\frac{dy^2-6xy^2dx^2}{y(y+1)}.$$

Наконец, подставим вместо dy его выражение:

$$d^2y=\frac{\left(-\frac{3x^2y}{y+1}dx\right)^2-6xy^2dx^2}{y(y+1)}$$

и упростим:

$$d^2y=\frac{9x^4y-6xy(y+1)^2}{(y+1)^3}dx^2.$$

Замечание. Так как $dy=y'dx$, $d^2y=y''dx^2$, то попутно мы нашли производные: $y'=-\dfrac{3x^2y}{y+1}$, $y''=\dfrac{9x^4y-6xy(y+1)^2}{(y+1)^3}$.

1.33. Продифференцируем равенство один раз:

$$3x^2+3y^2\cdot y'-5y^4\cdot y'=1 \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{3x^2-1}{5y^4-3y^2}\bigg|_{x=1,y=1}=1.$$

Уравнение касательной:

$$y=y(1)+y'(1)(x-1)=1+(x-1)=x;$$

уравнение нормали:

$$y=y(1)-\frac{1}{y'(1)}(x-1)=1-(x-1)=2-x.$$

1.34. Заметим, что в силу известного тождества $x+y=\arcsin t+\arccos t=\dfrac{\pi}{2}$, откуда находим: $y=\dfrac{\pi}{2}-x$, $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, следовательно, $y'=-1$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

1.35. $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$, где $t\neq 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

$$y''_{x^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{-\frac{1}{1-\cos t}}{a(1-\cos t)}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}},$$

$$y'''_{x^3}=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{2a^2\sin^5\frac{t}{2}2\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{\cos\frac{t}{2}}{4a^2\sin^7\frac{t}{2}}.$$

1.36. Может, если уравнение $y=f(x)$ при каждом фиксированном $y\in(-\infty,+\infty)$ имеет единственное решение (можно сказать так: если разным значениям x соответствуют разные y). Предложенная функция как раз осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Обратная к ней функция имеет вид:

$$x=\begin{cases} y, & \text{если } y \text{ – рационально;}\\ -y, & \text{если } y \text{ – иррационально.}\end{cases}$$

1.37. Рассмотрим интервал $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in\mathbb{Z}$. Функция на этом промежутке имеет вид: $y=\operatorname{tg}(x-\pi n)$. Это непрерывная, строго монотонно возрастающая функция, следовательно, у нее существует обратная функция. Найдем ее: $\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x-\pi n))$. Применяя тождество $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha))=\alpha$, $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, получим: $\operatorname{arctg}y=x-\pi n$, откуда находим $x=\operatorname{arctg}y+\pi n$, $y\in\mathbb{R}$. Заменив x на y, а y на x, имеем обратную функцию: $y=\operatorname{arctg}x+\pi n$, где $x\in\mathbb{R}$.

1.38. а) Введем для удобства промежуточную переменную $t=e^x$, тогда $y=\frac{t-t^{-1}}{2}\Leftrightarrow t^2-2yt-1=0\Leftrightarrow t_{1,2}=y\pm\sqrt{y^2+1}$. В силу положительности t имеем $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$, откуда логарифмированием получаем: $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$. Итак, обратная функция (ее называют ареасинус и обозначают $y=\operatorname{arsh}x$) имеет вид: $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$. Осталось продифференцировать: $y'=\ldots=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

б) Пусть $y = \operatorname{arsh}x$, тогда обратная к ней $x = \operatorname{sh} y$. По теореме о производной обратной функции имеем: $(\operatorname{arsh}x)' =$

$$= \frac{1}{(\operatorname{sh} y)'} = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh}x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh}x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1.39. Известно, что если при всех допустимых y выполнено тождество $f(f^{-1}(y)) = y$, то функция $f^{-1}(y)$ является обратной к функции $f(y)$. Поэтому $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(4^y + 4^{-y})$ является обратной к f, и ее производная $\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{2}\ln 4(4^y - 4^{-y}) > 0$ при $y > 0$ (обе функции f и f^{-1} возрастают одновременно).

1.40. По формуле Лейбница

$$y^{(50)}(x) = \sum_{i=0}^{50} C_{50}^i (x^2)^{(i)} (\sin 2x)^{(50-i)} =$$

$$= C_{50}^0 \cdot x^2 \cdot 2^{50} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\cdot 50\right) + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot 2^{49} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\cdot 49\right) +$$

$$+ C_{50}^2 \cdot 2 \cdot 2^{48} \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\cdot 48\right) =$$

$$= 2^{50}\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right).$$

Тогда для дифференциала в произвольной точке x получаем

$$d^{50}y(x) = 2^{50}\left(-x^2\sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2}\sin 2x\right)dx^{50},$$

а в точке $x = 1$ имеем:

$$d^{50}y(1) = 2^{50}\left(-\sin 2 + 50\cos 2 + \frac{1225}{2}\sin 2\right)dx^{50}.$$

1.41. Прежде чем дифференцировать, разложим дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right).$$

Тогда $y' = \dfrac{(-1)^n n!}{2a}\left(\dfrac{1}{(x-a)^{n+1}} - \dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$.

1.42. Так как $(e^{-3x})^{(i)} = (-3)^i e^{-3x}$ и все производные порядка выше 2-го у функции $x^2 - 7x$ равны нулю, получим:

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (e^{-3x})^{(n-i)}(x^2-7x)^{(i)} = C_n^0 (e^{-3x})^{(n)}(x^2-7x)^{(0)} +$$

$$+ C_n^1 (e^{-3x})^{(n-1)}(x^2-7x)' + C_n^2 (e^{-3x})^{(n-2)}(x^2-7x)'' =$$

$$= (-3)^n e^{-3x}(x^2-7x) + n(-3)^{(n-1)}e^{-3x}(2x-7) +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}(-3)^{n-2}e^{-3x}\cdot 2 =$$

$$= (-3)^{n-2}e^{-3x}(9(x^2-7x) - 3n(2x-7) + n(n-1)).$$

Тогда $d^n y(x) = (-3)^{n-2}e^{-3x}(9(x^2-7x) - 3n(2x-7) + n(n-1))dx^n$ и $d^n y(0) = (-3)^{n-2}(21n + n(n-1))dx^n$.

1.43. $\frac{1}{2}$. Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \overset{[Л]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.$$

1.44. 1. Решение.

$$\lim_{x\to+0}(\arcsin x)^{2x} \overset{[0^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to+0} 2x\ln(\arcsin x)} = e^{2\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(\arcsin x)}{\frac{1}{x}}} \overset{[Л]}{=}$$

$$e^{2\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^{-2\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^2}{\arcsin x}\cdot\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = e^{-2\cdot 0\cdot 1} = 1.$$

1.45. 1. Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}} \overset{[\infty^0]}{=} e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)}{x}} \overset{[Л]}{=}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos^2\frac{\pi x}{2x+1}}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi(2x+1)-2\pi x}{(2x+1)^2}}{\sin\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\cos\frac{\pi x}{2x+1}}} =$$

$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)}$. Применяя тождество $\sin\alpha = \sin(\pi-\alpha)$ при $\alpha = \dfrac{2\pi x}{2x+1}$, получим: $\sin\dfrac{2\pi x}{2x+1} = \sin\dfrac{\pi}{2x+1}$, поэтому

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{2\pi x}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2x+1}}\cdot\frac{2}{2x+1}\right)} = e^{1\cdot 0} = 1.$$

1.46. Дифференцируема, $f'(0) = -1/12$. Решение. Заметим, что функция непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x-1}\right) = \dfrac{1}{2}$ (докажите). Далее, по определению производной в точке $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{2}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x-1)} \overset{[\text{Л}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{4x(e^x-1) + 2x^2e^x} \overset{[\text{Л}]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-xe^x}{4(e^x-1) + 2x^2e^x + 8xe^x} \overset{[\text{Л}]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-e^x - xe^x}{12e^x + 12xe^x + 2x^2e^x} =$$

$= -1/12$. Следовательно, функция дифференцируема в точке $x = 0$ и $f'(0) = -1/12$.

1.47. Воспользуемся разложением (при $|x| < 1$):

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

и, преобразовав функцию у виду $f(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{3x}{2}}$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \ldots + (-1)^n\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n\right) + o(x^n) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{9}{8}x^2 - \ldots + (-1)^n\frac{3^n}{2^{n+1}}x^n + o(x^n).$$

1.48. $-\dfrac{23!}{2}$. Решение. Преобразуем функцию к виду $f(x) = \dfrac{1}{2}(\sin(x^7+x^8) + \sin(x^7-x^8))$. Имеем

$$\sin(x^7+x^8) = (x^7+x^8) - \frac{1}{3!}(x^7+x^8)^3 + o(x^{24}) =$$

$$= x^7 + x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} + 3x^{22} + 3x^{23} + x^{24}) + o(x^{24}),$$

$$\sin(x^7-x^8) = (x^7-x^8) - \frac{1}{3!}(x^7-x^8)^3 + o(x^{24}) =$$

$$= x^7 - x^8 - \frac{1}{6}(x^{21} - 3x^{22} + 3x^{23} - x^{24}) + o(x^{24}),$$

тогда

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sin(x^7+x^8) + \sin(x^7-x^8)\right) = x^7 - \frac{1}{6}x^{21} - \frac{1}{2}x^{23} + o(x^{24}).$$

Так как коэффициент $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ при x^{23} равен $\dfrac{f^{(23)}(0)}{23!}$, то, приравнивая, отсюда находим $f^{(23)}(0) = -\dfrac{23!}{2}$.

1.49. $C = -1/2$, $n = 4$. Решение. Так как при $x \to 0$ имеем $\cos(x^2) = 1 - \dfrac{x^4}{2!} + o(x^4)$, и при $t \to 0$ имеем $\ln(1+t) = t + o(t)$, то, подставляя, получаем:

$$\ln(\cos(x^2)) = \ln\left(1 + \left(-\frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)\right) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4).$$

1.50. -1. Решение. Воспользуемся готовыми разложениями синуса, арктангенса, арксинуса и тангенса, удерживая при разложении члены не выше 3-й степени (члены 1-й степени у всех этих разложений одинаковы):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{\arcsin x - \operatorname{tg} x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{\left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) - \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{-\frac{x^3}{6} + o(x^3)} = -1.$$

1.51. $\dfrac{3}{4}$. Решение. Перепишем предел в виде

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{2}{x}\right)}{\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right)}.$$

Так как при $t \to 0$ имеют место разложения

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + o(t^2), \quad \ln(1+t) = t + o(t),$$

то при $x \to +\infty$

$$\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$\ln\left(1 - \frac{2}{x}\right) = -\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Подставляя под знак предела, получим:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) - 1 - \frac{2}{x}\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-\frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)}{-\frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{3}{4}.$$

1.52. $-\frac{1}{6}$. Решение. 1) $\cos(\sin x) = 1 - \dfrac{\sin^2 x}{2} + \dfrac{\sin^4 x}{24} + o(x^4) =$
$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4).$$

2) Так как при $t \to 0$ $\sqrt{1+t} = 1 + \dfrac{t}{2} - \dfrac{t^2}{8} + o(t^2)$, то

$$\sqrt{1 + (-x^2 + x^4)} = 1 + \frac{1}{2}(-x^2 + x^4) - \frac{1}{8}(-x^2 + x^4)^2 + o(x^4) =$$

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4).$$

3) $\ln(1 + x^4) = x^4 + o(x^4)$. Подставляя полученные разложения под знак предела, находим:

$$\lim_{x\to0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{6}.$$

1.53. а) Нет сомнений, что точка $x = 0$ является для данной функции точкой локального минимума, так как $f(0) = 0 < f(x)$ при всех $x \neq 0$. Но производной в этой точке нет, значит, на отрезке $[-1, 1]$ условия теоремы Ферма не выполнены.

б) На отрезке $[0, 1]$ нет точек локального внутреннего экстремума, поэтому и в этом случае утверждение теоремы не имеет места.

1.54. Данная функция непрерывна на указанном отрезке. Проверим, имеет ли функция производную во всех точках внутри отрезка. Подозрительной является точка $x = 1$, в которой происходит "стыковка" двух графиков. Но поскольку при $x = 1$ односторонние производные существуют, конечны и равны: $(x^2 - 1)' = (2\ln x)' = 2$, то функция дифференцируема в этой точке (и графики имеют общую касательную, плавно переходя друг в друга). Итак, теорема Лагранжа применима. Для нахождения точки ξ запишем формулу конечных приращений: $f'(\xi) = \dfrac{f(e) - f(0)}{e - 0} = \dfrac{3}{e}$. Если $\xi \leqslant 1$, то $f'(\xi) = 2\xi$ и из равенства $2\xi = \dfrac{3}{e}$ находим $\xi = \dfrac{3}{2e}$. Если $\xi > 1$, то $f'(\xi) = \dfrac{2}{\xi} = \dfrac{3}{e}$, откуда $\xi = \dfrac{2e}{3}$. Итак, формуле Лагранжа удовлетворяют два значения: $\xi = \dfrac{3}{2e}$ и $\xi = \dfrac{2e}{3}$.

1.55. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию $f(x) = \ln x$. Согласно теореме Лагранжа, $\ln b - \ln a = \dfrac{1}{\xi}(b - a)$, или $\ln\dfrac{b}{a} = \dfrac{b-a}{\xi}$, $\xi \in (a, b)$. Поскольку $a < \xi < b$, то $\dfrac{b-a}{b} < \dfrac{b-a}{\xi} < \dfrac{b-a}{a}$, откуда и следует неравенство.

В частности, при $a = 1$, $b = 1 + x$ доказанное соотношение принимает вид $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, $x > 0$.

1.56. Так как функция $y = \operatorname{arctg} x$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на любом отрезке $[a, b]$, то $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \dfrac{1}{1+\xi^2}$, $\xi \in (a, b)$, откуда

$$|\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b| \leqslant |a - b|.$$

1.57. Все условия теоремы Коши выполнены (см. замечание после теоремы 4.5): каждая из функций непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и дифференцируема внутри него. Кроме того, $g(-1) \neq g(1)$, $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ при $x \in (-1, 1)$. Здесь $\xi = -\frac{1}{3}$, так как

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2-0}{1+1} = \frac{2\xi+1}{3\xi^2},$$

откуда $\xi_1 = -\frac{1}{3}$, $\xi_2 = 1 \notin (-1, 1)$.

1.58. Обе функции $\arcsin x$ и $\arccos x$ определены и непрерывны на отрезке $[-1, 1]$ и дифференцируемы внутри него, причем $(\arcsin x + \arccos x)' \equiv 0$. Таким образом, по следствию из теоремы Лагранжа, $\arcsin x + \arccos x \equiv C$, $x \in [-1, 1]$. Чтобы найти константу C, подставим в функцию $\arcsin x + \arccos x$, например, значение $x = 0$: $C = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.

1.59. Нет. Рассмотреть пример $f(x) = x + \sin x$.

1.60. $y' = x^{\alpha-1}e^{-x}(\alpha - x) > 0$ при $x < \alpha$. Следовательно, при $0 < x < \alpha$ функция возрастает, а при $\alpha < x < +\infty$ – убывает.

1.61. Выясним, где функция возрастает:

$$f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \ln x + \frac{\pi}{4} < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-\frac{7\pi}{12} + 2\pi n} < x < e^{\frac{13\pi}{12} + 2\pi n}$$

Тогда убывать функция будет на интервалах, где

$$f'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\frac{13\pi}{12} + 2\pi n} < x < e^{\frac{17\pi}{12} + 2\pi n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

1.62. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, ее производная

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x (x - \operatorname{tg} x)}{x^2} < 0,$$

поскольку $x < \operatorname{tg} x$ и $\cos x > 0$ при $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Значит, на данном интервале $f(x)$ убывает и $f(x) > f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\dfrac{\sin x}{x} > \dfrac{2}{\pi}$.

1.63. Достаточно доказать, что $y''_{xx} > 0$. В самом деле, $y'_x = f'_g \cdot g'_x$, тогда $y''_{xx} = f''_{gg} \cdot (g'_x)^2 + f'_g \cdot g''_{xx} > 0$, поскольку $f''_{gg} > 0$ (в силу выпуклости функции f вниз), $(g'_x)^2 \geqslant 0$, $f'_g > 0$ (в силу возрастания функции f), $g''_{xx} > 0$ (в силу выпуклости функции g вниз).

1.64. При $x > 0$ $y'' = x^x\left((\ln x + 1)^2 + \dfrac{1}{x}\right) > 0$, откуда следует, что кривая выпукла вниз при всех $x > 0$.

1.65. Продифференцируем последовательно два раза: $y' = 4x^3 + 3ax^2 + 3x$, $y'' = 12x^2 + 6ax + 3 = 3(4x^2 + 2ax + 1) \geqslant 0$ $\Leftrightarrow D = 4a^2 - 16 \leqslant 0 \Leftrightarrow |a| \leqslant 2$.

1.66. Так ка функция $y = e^x$ на всей числовой прямой выпукла вниз ($y'' > 0$), то в силу неравенства Йенсена при $x \neq y$ имеем $\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$.

1.67. Да, например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \neq 0; \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

точка $x = 0$ является точкой локального максимума. В самом деле, рассмотрим приращение функции в этой точке: $\Delta f(0) = f(\Delta x) - f(0) = (\Delta x)^2 - 1 < 0$ при достаточно малых Δx. Поскольку приращение сохраняет отрицательный знак, то $x = 0$ – точка локального максимума.

1.68. Найдем точки возможного экстремума: $y' = 2x2^x + x^2 2^x \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{2}{\ln 2}$. Найдем вторую производную: $y'' = 2^x\left(2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 x\right)$. Так как $y''(x_1) = 2 > 0$, то x_1 – точка локального минимума, само же значение минимума равно $y(0) = 0$. Далее, так как $y''(x_2) = 2^{x_2}(2 - 8 + 4) < 0$, то

x_2 – точка локального максимума, равного $y(x_2) = \dfrac{4}{e^2 \ln^2 2}$.

1.69. Вычисляя последовательно в точке $x = 0$ производные, находим: $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 1 \neq 0$. Поскольку первая ненулевая производная имеет четный порядок, то $x = 0$ – точка экстремума; поскольку $f^{(4)}(0) > 0$, то это точка локального минимума (равного 3).

1.70. Для определенности предположим, что в точке x_0 $f(x)$ достигает максимума. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого x из окрестности $0 < |x - x_0| < \delta$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$. Так как $f(x) \geqslant 0$ и $C > 0$, то из последнего неравенства следует: $Cf^2(x) < Cf^2(x_0)$, т.е. $F(x) < F(x_0)$. Итак, в точке x_0 $F(x)$ достигает максимума. Аналогично доказывается в случае минимума.

1.71. $y' = -2\sin x + 2\cos 2x = -2\sin x + 2(1 - 2\sin^2 x) = -2(2\sin^2 x + \sin x - 1)$. Производная равна нулю, если $\sin x = -1$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Первое невозможно на заданном отрезке; единственное решение второго уравнения, попадающее в отрезок – это $x = \dfrac{\pi}{6}$. Поскольку $y(0) = 2$, $y(\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$, $y(\pi/2) = 0$, то наименьшее значение равно $y(\pi/2) = 0$, а наибольшее $y(\pi/6) = 3\sqrt{3}/2$.

1.72. Пусть x и y – стороны прямоугольника. Тогда $S = xy$, $P = 2(x+y) = 2\left(x + \dfrac{S}{x}\right)$. Найдем точки возможного экстремума: $P'(x) = 2 - \dfrac{2S}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = S \Leftrightarrow x^2 = xy \Leftrightarrow x = y = \sqrt{S}$. Убедившись, что производная меняет в точке $x = \sqrt{S}$ знак с минуса на плюс, получаем, что наименьший периметр будет у квадрата со стороной $\sqrt{S}$.

1.73. Делением многочлена на многочлен приведем функцию к виду: $y = x^2 + x + 1 + \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$. Применяя неравенство о сумме взаимно обратных чисел $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ $(a > 0)$, получим $y \geqslant 2$, причем неравенство обращается в равенство только при условии $x^2 + x + 1 = 1$, т.е. при $x \in \{-1; 0\}$.

1.74. Проверим для сложной функции условие периодичности: $y(x+T) = g(f(x+T)) = g(f(x)) = y(x)$. Поскольку это выполнено при всех $x \in D(y)$, то функция $y = g(f(x))$ будет периодической с тем же периодом.

1.75. Умножение функции $f(x)$ на число A приводит к растяжению (сжатию) или осевой симметрии относительно оси абсцисс, что не влияет на периодичность функции и не меняет ее периода. Добавление константы D вызывает смещение графика вверх (вниз) вдоль оси ординат и также не оказывает влияния на периодичность. Так как $f(x) = A \cdot f\left(B(x + \frac{C}{B})\right) + D$, то C отвечает за параллельный перенос графика вправо (влево) и тоже не изменяет периода. Единственный из указанных коэффициентов, который изменяет период – это B, поскольку он отвечает за растяжение (сжатие) вдоль оси абсцисс.

1.76. а) Представим данную функцию как сложную функцию $y = g(f(x))$, где $g(f) = \dfrac{3g^2 - 4g + 2}{2g^2 - 3g}$, $f(x) = \cos x$. Так как "внутренняя" функция $f(x) = \cos x$ является периодической, то и сложная функция также будет периодической с тем же периодом 2π.

б) $D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{n}{5},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Покажем, что $T = \dfrac{1}{5}$ является периодом функции. Во-первых, если $x \in D(y)$, то $x \pm \dfrac{1}{5} \in D(y)$. Во-вторых, при всех $x \in D(y)$

$$f\left(x + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\{5(x + \frac{1}{5})\}} = \frac{1}{\{5x + 1\}} = \frac{1}{\{5x\}} = f(x).$$

1.77. Известно, что если период функции $y = f(x)$ равен T_1, а период функции $y = g(x)$ равен T_2, то период T функции $y = f(x) \pm g(x)$ равен наименьшему числу, при делении которого на T_1 и T_2 получаются целые числа.

а) Периоды четырех слагаемых, соответственно, равны: $T_1 = 4\pi/3$, $T_2 = 3\pi/5$, $T_3 = \pi$, $T_4 = 3\pi/4$. Тогда их сумма периодична с периодом $T = 12\pi$.

б) Периоды каждого из двух слагаемых, соответственно, равны $T_1 = 2$, $T_2 = \pi$. Первое из чисел рационально, второе – иррационально (они несоизмеримы). Поэтому числа, которое при делении на 2 и π давало бы одновременно целые числа, не существует. Данная функция не является периодической.

в) Если функция $y = f(x)$ периодична с периодом $T_1 > 0$, а функция $y = g(x)$ периодична с периодом $T_2 > 0$, то период T функции $y = f(x) \cdot g(x)$ равен наименьшему положительному действительному числу T, при делении которого на T_1 и T_2 в частном получаются целые числа.

В данном случае $T_1 = 2\pi$, $T_2 = \sqrt{2}\pi$ и так как эти числа несоизмеримы, то такого числа T не существует, следовательно, функция не является периодической.

1.78. Обозначим $h(x) = f(x) + g(x)$, тогда $h(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$. Так как в условиях задачи $h(-x) \neq h(x)$ и $h(-x) \neq -h(x)$ (докажите методом от противного), то функция не является ни четной, ни нечетной.

1.79. Доказательство следует из цепочек равенств:

$$y(-t) = f(\varphi(-t)) = f(\varphi(t)) = y(t),$$

$$y(-t) = f(\varphi(-t)) = f(-\varphi(t)) = -f(\varphi(t)) = -y(t).$$

1.80. Доказательство следует из цепочки:

$$y(-t) = f(\varphi(-t)) = f(-\varphi(t)) = f(\varphi(t)).$$

1.81. Доказательство следует из цепочки:

$$y(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -y(x).$$

1.82. а) четна; б) нечетна; в) четна; г) четна. Доказательство проводится по определению.

1.83. По определению четной функции при всех $t \neq 0$ должно выполняться тождество:

$$f(-t) = f(t) \Leftrightarrow \frac{-t}{e^{-t} - 1} - at = \frac{t}{e^{t} - 1} + at,$$

откуда, сократив на t, находим $a = 1/2$.

1.84. Так как область определения функции задается неравенством

$$\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 3x - 4} > 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+5)}{(x+4)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$x \in (-\infty, -5) \bigcup (-4, 0) \bigcup (1, +\infty)$, а это множество симметрично относительно точки $x = -2$, то график функции может быть симметричен только относительно точки

$(-2, y(-2)) = (-2, -8)$. Сделав подстановку $t = x + 2$, $s = y + 8$, перейдем в новую систему координат и получим новую функцию $s(t) = 4t + \log_2 \dfrac{t^2 + t - 6}{t^2 - t - 6}$, для которой достаточно проверить условие нечетности $s(-t) = -s(t)$:

$$s(-t) = -4t + \log_2 \frac{t^2 - t - 6}{t^2 + t - 6} = -s(t),$$

это верно при всех допустимых t, что и требовалось доказать.

1.85. Очевидно, асимптоты возможны лишь при $t \to \pm\infty$. Найдем, например, асимптоту при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{2t + e^{-2t}}{t + e^{-t}} = 2,$$

$$b = \lim_{t \to +\infty} (y(t) - kx(t)) = \lim_{t \to +\infty} (2t + e^{-2t} - 2(t + e^{-t})) = 0.$$

Итак, имеем асимптоту $y = 2x$. Убедитесь самостоятельно,что при $t \to -\infty$ асимптоты нет.

1.86. Заметим, что функция четная, и найдем асимптоту при $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{|x|(2 + \cos \frac{1}{x})}{x} = 3,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(|x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right) - 3x \right) = 0.$$

Таким образом, получили асимптоту $y = 3x$. С учетом четности при $x \to +\infty$ имеется вторая асимптота $y = -3x$.

К Главе 2

I.1. $x = 1$ - локальный максимум, $x_1 = 1 - \sqrt{2}, x_2 = 1 + \sqrt{2}$ - точки перегибов, асимптот нет.

I.2. $x = -1$ - лок.минимум, $x = -5$ - лок.максимум, $x = -3, x = -7$ - точки перегибов, $y = 0$ - левая асимптота.

I.3. $x = 0$ - точка разрыва I рода, $x = e^{-2}$ - локальный минимум, $x = 1$ - точка перегиба.

I.4. $y = x$ - асимптота, экстремумов нет, $x = 3, x = -3, x = 0$ - точки перегибов.

I.5. $x = 1, x = -1$ - вертикальные асимптоты, $x = -\sqrt{3}$ - локальный максимум, $x = \sqrt{3}$ - локальный минимум, $x = 3, x = -3, x = 0$ - точки перегибов.

II.1. Функции $x(t), y(t)$ являются положительными, при $t = 0$ имеется точка возврата: $x_{min} = x(0) = 1, y_{min} = y(0) = 1$, направление выпуклости вниз при $t < 0$ и вверх при $t > 0$, асимптота $y = 2x$ при $t \to +\infty$.

II.2. Основная область $[0; \pi]$. Точки пересечения с осями координат: $(\frac{a}{2}; 0)$ при $t = \frac{\pi}{6}$ и при $t = \frac{5\pi}{6}$, $(0; -\frac{a}{\sqrt{2}})$ при $t = \frac{\pi}{4}$, $(-a; 0)$ при $t = \frac{\pi}{2}$, $(0; \frac{a}{\sqrt{2}})$ при $t = \frac{3\pi}{4}$; экстремумы функций $x(t)$ и $y(t)$: $x_{max} = y_{max} = a$ при $t = 0$, $x_{min} = -a$ при $t = \frac{\pi}{2}$, $y_{min} = -a$ при $t = \frac{\pi}{3}$ и при $t = \pi$, $y_{max} = a$ при $t = \frac{2\pi}{3}$, $x_{max} = a$ при $t = \pi$; направление выпуклости: вниз при $0 < t < \frac{\pi}{2}$, вверх при $\frac{\pi}{2} < t < \pi$.

II.3. $x(t), y(t)$ - неотрицательные периодические функции. Основная область изменения параметра: $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Экстремумы: $x_{min} = 0$ и $y_{max} = 1$ при $t = \frac{\pi}{2}$; $x_{max} = 1$ и $y_{min} = 0$ при $t = 0$; направление выпуклости везде вниз.

II.4. Область изменения параметра: $t > 0$. Кривая симметрична относительно прямой $x + y = 0$. Экстремумы: $x_{min} = -\frac{1}{e}, y = -e$ при $t = \frac{1}{e}$; $y_{max} = \frac{1}{e}, x = e$ при $t = e$. Точки перегиба: $x_1 = -\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}, y_1 = -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ при $t = e^{-\sqrt{2}}$; $x_2 = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, y_2 = \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$ при $t = e^{\sqrt{2}}$. Изменение направления выпуклости в точке, где $t = e^{-1}$. Асимптоты: $x = 0, y = 0$.

II.5. $x(t), y(t)$ - неотрицательные функции, $x_{min} = 0$ при

$t = -1$, $y_{min} = 0$ при $t = 1$. Направление выпуклости: вниз при $t > -1$ и вверх при $t < -1$.

III.1. Область определения: $\varphi \in [0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi] \cup [\frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$. Функция $R(\varphi)$ периодическая с периодом $\frac{2\pi}{3}$. Кривая замкнута и имеет 3 одинаковых лепестка. Оси симметрии кривой: $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}, \varphi = \frac{3\pi}{2}$. Начало координат $O(0; 0)$ является тройной точкой. В первом лепестке: $\varphi \in [0; \frac{\pi}{3}]$ имеем: локальный максимум $r_{max} = a$ при $\varphi = \frac{\pi}{6}$, локальный минимум $r_{min} = 0$ при $\varphi = 0$ и при $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

III.2. Область определения функции: $|\varphi| < \frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}$. Период функции $\frac{2\pi}{3}$. $r_{min} = a$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\frac{2\pi}{3}$. Асимптоты: $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}, \varphi = \pm\frac{\pi}{2}, \varphi = \pm\frac{5\pi}{6}$.

III.3. Функция непрерывна как элементарная; асимптота: $\varphi = 1$ (так как $\lim r(\varphi) = +\infty$ при $\varphi \to 1 + 0$). Функция $r(\varphi)$ всюду убывает и $\lim r(\varphi) = 0$ при $\varphi \to +\infty$, кривая асимптотически входит в полюс по спирали.

III.4. Область определения функции $\varphi(r)$ задается неравенством: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqslant r < +\infty$. Функция $\varphi(r)$ положительна, нулей не имеет; $\lim \varphi(r) = \pi$ при $r \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $\lim \varphi(r) = \frac{\pi}{2}$ при $r \to +\infty$. Экстремумы: $\varphi_{min} = \arccos(\frac{1}{4}$ при $r = 2$, краевой максимум $\varphi(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}) = \pi$. Функция убывает при $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < r < 2$ и возрастает при $r > 2$. Асимптота: $r \cos\varphi = 1$ при $r \to \infty$.

IV.1. $\alpha = 2, R = \frac{p}{2}, S = \frac{p^2}{4}$, где α - центральный угол сектора, R - его радиус, S - площадь.

IV.2. $S = \pi R^2(\sqrt{5} + 1), r = R\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}, H = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$, где S, r, H - полная поверхность, радиус и высота цилиндра.

IV.3. $H = 4R$.

IV.4. $t = \frac{2m_0}{3k}$. (Кинетическая энергия капли $E = (m_0 - kt)\frac{gt^2}{2}$).

IV.5. Наилучшее расстояние равно $2.4m$.

IV.6. Наибольшая дальность струи $l = h$ при глубине отверстия $x = \frac{h}{2}$.

IV.7. $l = (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть I. М.: Физматлит, 2002.

[2] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. Учебник для вузов. М.: Дрофа, 2003.

[3] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Часть I. Под ред. Тихонова А.Н. 3-е изд. М.: Проспект, 2004.

[4] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 1. В 2 кн. Учеб. пособие для университетов, пед. вузов. Под ред. Садовничего В.А. 2-е изд. М.: Высш. школа, 2000.

[5] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: АСТ-Астрель, 2005.

[6] Пантаев М.Ю. Матанализ с человеческим лицом, или Как выжить после предельного перехода. Полный курс математического анализа. Т. 1.: Начало анализа. Язык анализа. Предел последовательности. Предел функции и непрерывность. Производная. Основные теоремы дифференциального исчисления. Применение производной. М.: ЛИБРОКОМ, 2012.

[7] Иванов О.А., Климчук С. Математический анализ для первокурсников. М.: МЦНМО, 2013.

[8] Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: теория и задачи. Учебное пособие для студентов 1 курса университетов. Под ред. В.А. Ильина. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2011.

[9] Садовничая И.В., Фоменко Т.Н. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: теория и задачи. Учеб. пособие для студентов 1 курса университетов. Под ред. В.А. Ильина. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2012.

[10] Хорошилова Е.В. Математический анализ. Неопределенный интеграл (в помощь практическим занятиям). Учеб. пособие для студентов университетов. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2007.

[11] Садовничая И.В., Хорошилова Е.В. Определенный интеграл. Теория и практика вычислений. Учеб. пособие для студентов университетов. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2008.

[12] Садовничая И.В., Фоменко Т.Н. Математический анализ. Функции многих переменных: теория и задачи. Учеб. пособие для студентов 1 курса университетов. М.: Издат. отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова. МАКС Пресс, 2008.

Sadovnichaya I. V., Fomenko T. N., Khoroshilova E. V.

Mathematical Analysis. Differentiation of one variable functions: Theory and problems

Text-book for I-st year university students

This edition is devoted to theoretical and practical aspects of the topic "Differentiation of one-variable function", being studied in the "Mathematical Analysis" course. The edition is based on the authors experience of lecturing and giving practical training at the Computational Mathematics and Cybernetics faculty of the Lomonosov Moscow State University. The text-book contains 3 sections, first of which is devoted to general theoretical aspects of the topic. It contains basic concepts and facts concerning the differentiation of functions, and a number of examples of applications of derivatives for solving various problems. The second section contains the general scheme of studying a function and constructing its graph. Recommendations for solving maximum/minimum problems are given as well. Several examples are given to demonstrate the solution of such problems. The third section contains a number of practical exercises over all topics considered in the previous two sections. The majority of the exercises are given with detailed solutions while others are recommended for students' self-work. All exercises are provided with answers. The book is aimed to help students in studying the theoretical part and in obtaining practical experience of solving problems on the topic "Differentiation of one variable function".

For university undergraduates. The edition can be useful for teachers reading lectures and giving practical training in mathematical analysis, and for everyone who wishes to study this topic on his own, or to familiarize with it more thoroughly.

Учебное издание

Садовничая Инна Викторовна, Фоменко Татьяна Николаевна, Хорошилова Елена Владимировна

Математический анализ. Дифференцирование функции одной переменной: Теория и задачи

Учебное пособие для студентов 1 курса университетов

Печатается в авторской редакции с оригинал-макета, подготовленного на факультете ВМиК МГУ

Подписано в печать 08.07.2015 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 9,5. Тираж 400 экз. Изд. № 10487. Заказ № 0330-15.

Издательство Московского университета. 125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5. Тел.: (495) 629-50-91.
Факс: (495) 697-66-71. Тел.: (495) 939-33-23 (отдел реализации). E-mail: secretary-msu-press@yandex.ru
Сайт Издательства МГУ: www.msu.ru/depts/MSUPubl2005. Интернет-магазин: http://msupublishing.ru
Адрес отдела реализации: Москва, ул. Хохлова, 11 (Воробьевы горы, МГУ).
E-mail: izd-mgu@yandex.ru. Тел.: (495) 939-34-93

Типография МГУ. 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 15.
Отпечатано: Публичное акционерное общество «Т8 Издательские Технологии».
109316 Москва, Волгоградский проспект, д. 42, корп. 5.